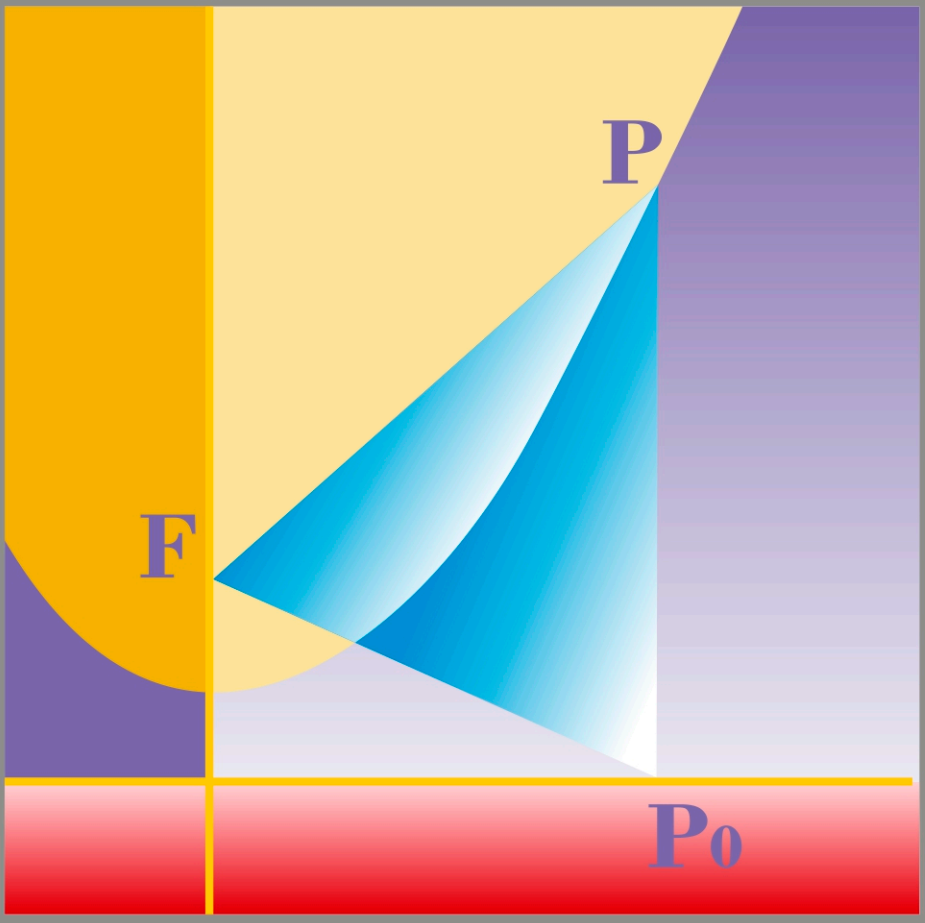
INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Geometria Analítica e Álgebra Linear



COLEÇÃO MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

Elon Lages Lima

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Lima, Elon Lages
Geometria analítica e álgebra linear / Elon Lages Lima. 1.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2014

324 p. : il. ; 23 cm. (Coleção matemática universitária)

Inclui bibliografia.
e-ISBN 978-85-244-0383-5
1. Geometria Analítica. 2. Álgebra Linear. I. Título. II. Série.

CDD-516.3

COLEÇÃO MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Elon Lages Lima

impa

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Copyright © 2014 by Elon Lages Lima

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Rodolfo Capeto, Noni Geiger e Sérgio R. Vaz
Ilustrações: Paulo Visgueiro

Coleção Matemática Universitária
Comissão Editorial:

Elon Lages Lima
S. Collier Coutinho
Paulo Sad

Títulos Publicados:

- Análise Real, vol. 1: Funções de uma Variável – Elon Lages Lima
- EDP. Um Curso de Graduação – Valéria Iório
- Curso de Álgebra, Volume 1 – Abramo Hefez
- Álgebra Linear – Elon Lages Lima
- Introdução às Curvas Algébricas Planas – Israel Vainsencher
- Equações Diferenciais Aplicadas – Djairo G. de Figueiredo e Aloisio Freiria Neves
- Geometria Diferencial – Paulo Ventura Araújo
- Introdução à Teoria dos Números – José Plínio de Oliveira Santos
- Cálculo em uma Variável Complexa – Marcio G. Soares
- Geometria Analítica e Álgebra Linear – Elon Lages Lima
- Números Primos: Mistérios e Recordes – Paulo Ribenboim
- Análise no Espaço R^n – Elon Lages Lima
- Análise Real, vol. 2: Funções de n Variáveis – Elon Lages Lima
- Álgebra Exterior – Elon Lages Lima
- Equações Diferenciais Ordinárias – Claus Ivo Doering e Artur Oscar Lopes
- Análise Real, vol. 3: Análise Vetorial – Elon Lages Lima
- Álgebra Linear. Exercícios e Soluções – Ralph Costa Teixeira
- Números Primos. Velhos Mistérios e Novos Recordes – Paulo Ribenboim

Distribuição:

IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: ddic@impa.br
http://www.impa.br

Prefácio

Embora seja geralmente a primeira coisa que se lê num livro, o prefácio é sempre a última a ser escrita. Tendo acabado de fazer a revisão final das provas, antes de mandar o texto para impressão, cumpre-me contar ao presumível leitor o que o livro contém e com que intenção o escrevi.

Comecemos com o título. No estilo de antigamente, ele seria algo como "Compêndio de Geometria Analítica e Cálculo Vetorial, servindo de introdução à Álgebra Linear." Simplificando, restou "Geometria Analítica e Álgebra Linear". Dito assim, fica a impressão de que esses dois assuntos são tratados com a mesma extensão.

Na verdade, trata-se essencialmente de um livro de Geometria Analítica, plana e espacial. Isto significa, por um lado, o estudo da Geometria por meio da introdução de coordenadas e, por outro lado, o método de olhar para problemas de Álgebra (e de Análise) sob o ponto de vista da Geometria.

Os vetores ocorrem inicialmente como instrumento para desenvolver a Geometria Analítica: muito úteis no caso do plano e indispensáveis no espaço. Em seguida percebe-se que a noção de dependência (e independência) linear de vetores é a chave para analisar o comportamento dos sistemas de equações lineares e a linguagem adequada para exprimir seus resultados. Neste ponto, estamos fazendo um pouco de Àlgebra Linear.

A fim de identificar as cônicas e as superfícies quádricas, precisamos estudar as formas quadráticas a duas e três variáveis. Somos então levados naturalmente a considerar matrizes simétricas 2×2 ou 3×3, seus autovalores e autovetores. Isto é Álgebra Linear.

Matrizes e determinantes ocorrem ainda na fórmula de Gram para a área de um paralelogramo ou o volume de um paralelepípedo.

E, finalmente, transformações lineares são brevemente estudadas, no plano e no espaço tridimensional, dando-se vários exemplos e mostrando-se como um sistema de substituições lineares transforma uma circunferência numa elipse e uma esfera num elipsóide.

Assim se mostra neste livro como o estudo da Geometria Analítica a duas e três dimensões conduz a noções básicas como dependência linear, matrizes, formas quadráticas, autovalores, transformações li-

neares, etc. Estes conceitos serão mais tarde sistematizados na Álgebra Linear, a qual terá sua aprendizagem suavizada e tornada natural para os estudantes que já possuam uma experiência prévia correspondente ao conteúdo do presente livro. Independente disso, é claro, a Geometria Analítica faz parte da cultura mínima necessária para estudos posteriores (ou simultâneos) de Cálculo, Análise, Equações Diferenciais, etc.

Os leitores aos quais este livro se destina são os alunos do primeiro ano da Universidade. Vários dos temas nele tratados constam, de uma forma mais superficial, do programa do Ensino Médio mas este fato não é levado em conta aqui, ou seja, não admitimos que o leitor possua conhecimento anterior sobre o assunto. Os livros citados na bibliografia contêm apresentações em certos pontos bem semelhantes a este, além de conterem uma ampla coleção de exercícios que poderão complementar aqueles aqui propostos.

É com grande satisfação que deixo consignados aqui meus agradecimentos aos Professores Eduardo Wagner e Paulo Cezar P. Carvalho, que colaboraram comigo nos livros que precederam este. Um agradecimento especial é devido ao Professor Jonas de Miranda Gomes pelo apoio, incentivo e valioso tempo investido na preparação deste livro. A todos, um abraço amigo do autor.

Rio de Janeiro, 25 de março de 2001.

Elon Lages Lima

Prefácio da segunda edição

Nesta edição, foi feita uma revisão exaustiva do texto e dos exercícios. Para tal, contei com a valiosa colaboração do Professor Florêncio Guimarães. Foram também refeitas diversas figuras, com a generosa participação do meu colega Moacyr Alvim. Além disso, acrescentei e modifiquei vários exercícios e reformulei a apresentação de alguns tópicos, notadamente nas seções referentes a formas quadráticas. O volume inteiro foi redigitado por Rogério Trindade. A todas esta pessoas, externo meu agradecimento.

Rio de Janeiro, 25 de março de 2005.

Elon Lages Lima

Contents

Introdução **1**

Coordenadas na Reta **3**
Exercícios 7

Coordenadas no Plano **8**
Exercícios 13

Segmentos de Reta no Plano **15**
Exercícios 21

A Distância entre Dois Pontos **23**
Exercícios 30

Escolhendo o Sistema de Coordenadas **31**
Exercícios 36

Outros Tipos de Coordenadas **37**
Exercícios 39

As Equações da Reta **40**
Exercícios 53

Ângulo entre Duas Retas **56**
Exercícios 57

Distância de um Ponto a uma Reta **58**
Exercícios 60

Área de um Triângulo **62**
Exercícios 64

Desigualdades Lineares **66**
Exercícios 73

Equação da Circunferência **75**
Exercícios 78

Reconhecimento da Equação da Circunferência **80**
Exercícios 84

Vetores no Plano **85**
Exercícios 91

Operações com Vetores **92**
Exercícios 99

Equação da Elipse **103**
Exercícios 107

Equação da Hipérbole **109**
Exercícios 113

Equação da Parábola **115**
Exercícios 118

Mudança de Coordenadas **120**
Exercícios 127

Formas Quadráticas **129**
Exercícios 137

A Equação Geral do Segundo Grau **139**
Exercícios 145

O Sinal de uma Forma Quadrática **146**
Exercícios 149

Transformações Lineares **150**
Exercícios 161

Coordenadas no Espaço **164**
Exercícios 168

As Equações Paramétricas de uma Reta **169**
Exercícios 171

Distância entre Dois Pontos no Espaço **172**
Exercícios 175

Segmentos de Reta no Espaço **176**
Exercícios 179

Vetores no Espaço **181**
Exercícios 186

Equação do Plano **188**
Exercícios 192

Sistemas de Equações Lineares com Duas Incógnitas **194**
Exercícios 197

Sistemas de Equações Lineares com Três Incógnitas **198**
Exercícios 203

Três Equações Lineares com Três Incógnitas **205**
Exercícios 217

Escalonamento (eliminação gaussiana) **220**
Exercícios 227

Operações com Matrizes **231**
Exercícios 238

Determinantes **240**
Exercícios 246

A Regra de Cramer **248**
Exercícios 251

O Determinante do Produto de Duas Matrizes **252**
Exercícios 254

Áreas, Volumes e a Matriz de Gram **255**
Exercícios 260

Caracterização das Matrizes Invertíveis **261**
Exercícios 263

O Produto Vetorial **266**
Exercícios 274

Mudança de Coordenadas **275**
Exercícios 280

Formas Quadráticas em $\mathbb{R}^3$ **283**

As Quádricas Centrais **286**
Exercícios 293

Completando Quadrados em $\mathbb{R}^3$ **294**
Exercícios 300

A Equação Geral do Segundo Grau em $\mathbb{R}^3$ **301**
Exercícios 305

Matrizes e Formas Quadráticas **306**
Exercícios 316

Transformações Lineares em $\mathbb{R}^3$ **317**
Exercícios 325

Bibliografia **326**

Introdução

A Geometria Analítica baseia-se na idéia de representar os pontos da reta por números reais, os pontos do plano por pares ordenados de números reais e os pontos do espaço por ternos ordenados de números reais.

Dentro dessa concepção, as linhas e as superfícies, no plano e no espaço, são descritas por meio de equações. Isto permite tratar algebricamente muitas questões geométricas e, reciprocamente, interpretar de forma geométrica certas situações algébricas.

A interconexão entre Geometria e Álgebra resultante desse ponto de vista foi responsável por extraordinários progressos na Matemática e suas aplicações.

No que se segue, apresentaremos as noções básicas de Geometria Analítica, enfatizando seus aspectos mais relevantes para um estudo introdutório.

Admitiremos conhecidos os fatos mais elementares da Geometria como, por exemplo, que por dois pontos dados passa uma, e somente uma, reta; que por um ponto dado fora de uma reta passam uma única paralela e uma única perpendicular a essa reta, etc.

1

Coordenadas na Reta

Admitimos fixada, de uma vez por todas, uma unidade de comprimento.

Dados os pontos A, B quaisquer, o comprimento do segmento de reta AB chama-se a *distância* entre os pontos A e B. Escrevemos $d(A, B)$ ou $\overline{AB}$ para indicar essa distância, que é um número real.

Convencionaremos pôr $d(A, A) = 0$. Se $A \neq B$, tem-se $d(A, B) > 0$. Além disso, vale

$$d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$$

se, e somente se, o ponto C pertence ao segmento de reta AB. É claro também que $d(A, B) = d(B, A)$.

A noção de distância permite introduzir coordenadas sobre uma reta, ou seja, representar os pontos da reta por meio de números reais. Para fazer isto, será necessário orientar a reta e escolher um dos seus pontos como origem.

Seguem-se os detalhes desse procedimento.

Uma reta diz-se *orientada* quando sobre ela se escolheu um sentido de percurso, chamado *positivo*; o sentido inverso chama-se *negativo*. Numa reta orientada, diz-se que o ponto B está *à direita* do ponto A (portanto A está *à esquerda* de B) quando o sentido de percurso de A para B é positivo.

Um *eixo* é uma reta orientada na qual se fixou um ponto O, chamado a *origem*.

Todo eixo E pode ser posto, de modo natural, em correspondência biunívoca com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, do seguinte modo:

À origem O do eixo faz-se corresponder o número zero. A cada ponto

X de E situado à direita de O corresponde o número real positivo $x = d(O,X)$ = distância de X à origem = comprimento do segmento de reta OX. Aos pontos situados à esquerda de O correspondem números reais negativos, cujos valores absolutos medem as distâncias desses pontos à origem.

Portanto, a cada ponto X no eixo E corresponde o número real $x = d(O,X)$ se X está à direita de O e $x = -d(O,X)$ se X está à esquerda de O.

O número real x, que corresponde ao ponto X do eixo E da maneira acima indicada, chama-se a *coordenada* desse ponto. Reciprocamente, para cada número real x existe um (único) ponto X em E cuja coordenada é x.

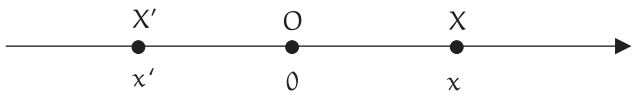


Figura 1.1 - x = d(O,X) x′ = -d(O,X′).

Se x e y são respectivamente as coordenadas dos pontos X e Y do eixo E então tem-se $x < y$ se, e somente se, X está à esquerda de Y.

Além disso, tem-se $d(X,Y) = |x - y|$.

A importante igualdade $d(X,Y) = |x-y|$ se demonstra usando (além da relação evidente $d(A,B) = d(B,A)$) o fato de que se A, B, C são pontos de uma reta tais que C está situado entre A e B então

$$d(A,B) = d(A,C) + d(C,B).$$

Com efeito, dados os pontos X e Y sobre o eixo E, com coordenadas respectivas x e y, sem perda de generalidade podemos supor que X esteja à esquerda de Y. Então há 3 casos possíveis:

(a) O está entre X e Y (logo $x < 0 < y$);

(b) Y está entre X e O (logo $x < y < 0$);

(c) X está entre O e Y (logo $0 < x < y$).

No primeiro caso, tem-se

$$d(X,Y) = d(X,O) + d(O,Y) = -x + y = |x - y|.$$

No segundo caso,

$$d(O,X) = d(O,Y) + d(Y,X),$$

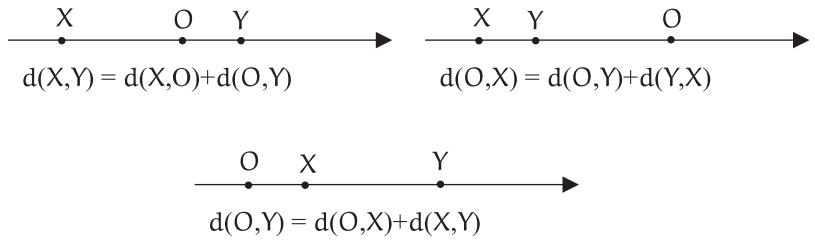


Figura 1.2 - As três posições relativas dos pontos O, X e Y.

ou seja, $-x = -y + d(X,Y)$, donde $d(X,Y) = y - x = |x - y|$.

Finalmente, no terceiro caso,

$$d(O,Y) = d(O,X) + d(X,Y),$$

isto é, $y = x + d(X,Y)$, donde $d(X,Y) = y - x = |x - y|$.

Se A e B são pontos do eixo E, com A à esquerda de B, e suas coordenadas respectivas são a e b, então a coordenada x de um ponto arbitrário X do segmento de reta AB é um número x tal que $a \leq x \leq b$. Noutras palavras, ao segmento de reta $AB \subset E$ corresponde o intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Para cada ponto X do segmento de reta AB, tem-se evidentemente $d(A,X) \leq d(A,B)$, logo a razão $t = d(A,X)/d(A,B)$ é um número real compreendido entre 0 e 1. Quando $X = A$ tem-se $t = 0$ e, quando $X = B$, vale $t = 1$.

Se, para cada $t \in [0,1]$, chamarmos de X_t o ponto do segmento de reta AB tal que $d(A,X_t)/d(A,B) = t$, veremos que a coordenada x_t do ponto X_t está relacionada com as coordenadas a e b dos pontos A e B pela igualdade $(x_t - a)/(b - a) = t$, ou seja,

$$x_t = (1-t)a + tb = a + t(b-a).$$

Quando $t = 1/2$, o ponto $X_t = X_{1/2}$ chama-se *ponto médio* do segmento AB; sua coordenada

$$x_{1/2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{a+b}{2}$$

é a média aritmética entre as coordenadas a e b dos pontos A e B.

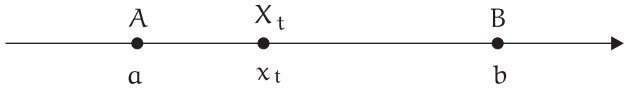


Figura 1.3 - $t = d(A,X_t)/d(A,B) = (x_t - a)/(b-a)$.

Noutro exemplo, tomando $t = 1/3$, obtemos o ponto $X = X_{1/3}$ cuja coordenada

$$x = \left(1 - \frac{1}{3}\right)a + \frac{1}{3}b = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$$

é o número que separa o intervalo $[a, b]$ em dois subintervalos $[a, x]$ e $[x, b]$ com $(x - a)/(b - a) = 1/3$.

Observação 1.1 Quando estudamos os números reais, fazemos a cada $x \in \mathbb{R}$ corresponder um ponto X sobre o eixo E. Em Geometria Analítica, o processo é inverso: procura-se associar a cada ponto do eixo E um número, chamado sua coordenada. Para isso, admitimos que exista a noção de distância entre dois pontos desse eixo, isto é, que tenha sido fixada uma unidade de comprimento.

Observação 1.2 Quando A é o ponto médio do segmento de reta XX', diz-se que X' é o *simétrico* de X relativamente ao ponto A. Se A, X e X' estão localizados sobre um eixo E e suas coordenadas são respectivamente a, x e x', tem-se então $a = (x + x')/2$, logo $x' = 2a - x$. Note que desta igualdade resulta $x = 2a - x'$. Isto corresponde ao fato de que X é por sua vez o simétrico de X' relativamente ao ponto A

Figura 1.4 - X e X' são simétricos relativamente ao ponto A, pois este é o ponto médio do segmento XX'.

Exemplo 1.1 Se no eixo E os pontos A e B têm respectivamente coordenadas 3 e 17 então a coordenada do ponto médio do segmento AB é 10 e a coordenada do ponto B', simétrico de B em relação a A, é -11.

Exercícios

1. Sejam $a < b$ respectivamente as coordenadas dos pontos A e B sobre o eixo E. Determine as coordenadas dos pontos $X_1, \ldots, X_{n-1}$ que dividem o segmento AB em n partes iguais.

2. Sejam $a < x < b$ respectivamente as coordenadas dos pontos A, X e B do eixo E. Diz-se que o ponto X divide o segmento AB em *média e extrema razão (divisão áurea)* quando se tem

$$\frac{d(A,X)}{d(A,B)} = \frac{d(X,B)}{d(A,X)}.$$

Supondo que X divide o segmento AB em média e extrema razão, calcule x em função de a e b.

3. Se o ponto O é a origem do eixo E e A é o ponto desse eixo que tem coordenada 1, qual é a coordenada do ponto X que divide o segmento OA em média e extrema razão? No Exercício 2, calcule a *razão áurea* $d(A,X)/d(A,B)$.

4. Os pontos A, B e X sobre o eixo E têm coordenadas a, b e x respectivamente. Se X' é o simétrico de X em relação ao ponto A e X'' é o simétrico de X' em relação a B, quais são as coordenadas de X' e X''?

5. Dados os pontos A, B no eixo E, defina a *distância orientada* $\delta(A,B)$ entre eles pondo $\delta(A,B) = d(A,B)$ se A está à esquerda de B e $\delta(A,B) = -d(A,B)$ se A está à direita de B. Prove que, para quaisquer pontos A, B e C do eixo E, tem-se $\delta(A,B) + \delta(B,C) + \delta(C,A) = 0$.

6. Sejam $a < b < c$ respectivamente as coordenadas dos pontos A, B e C situados sobre um eixo. Sabendo que $a = 17, c = 32$ e $d(A,B)/d(A,C) = 2/3$, qual é o valor de b?

7. Qual seria a resposta do exercício anterior se soubéssemos apenas que $a < c$?

8. Sejam A, B, C, D pontos dispostos nesta ordem sobre um eixo E. Esboce os gráficos das funções $\varphi, f, g : E \to \mathbb{R}$, dadas por:

$$\begin{aligned}
\varphi(X) &= d(X,A) + d(X,B),\\
f(X) &= d(X,A) + d(X,B) + d(X,C),\\
g(X) &= d(X,A) + d(X,B) + d(X,C) + d(X,D).
\end{aligned}$$

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) Pondo $f(0) = a$, defina a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assim: $g(x) = f(x) - a$. Prove então que $|g(x)| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $g(1) = 1$ ou $g(1) = -1$. Também $(g(x))^2 = x^2$.

(ii) Use a identidade $xy = \frac{1}{2}[x^2 + y^2 - (x-y)^2]$ para mostrar que $xy = g(x) \cdot g(y)$.

(iii) Se $g(1) = 1$, mostre que $g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $g(1) = -1$, mostre que $g(x) = -x$ para todo x.

(iv) Conclua que $f(x) = x + a$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ou então $f(x) = -x + a$ para todo x.

2

Coordenadas no Plano

Indica-se como $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y), onde x e y são números reais.

Dados (x, y) e (x', y') em $\mathbb{R}^2$, tem-se $(x, y) = (x', y')$ se, e somente se, $x = x'$ e $y = y'$. O número x chama-se a *primeira coordenada* e o número y a *segunda coordenada* do par (x, y). Observe, por exemplo, que os pares ordenados $(2, 3)$ e $(3, 2)$ são diferentes pois a primeira coordenada de $(2, 3)$ é 2 enquanto que a primeira coordenada de $(3, 2)$ é 3. Por outro lado, os conjuntos $\{2, 3\}$ e $\{3, 2\}$ são iguais pois um objeto pertence a um deles se, e somente se, pertence ao outro. Portanto, um par ordenado não é a mesma coisa que um conjunto com dois elementos. No par ordenado (x, y) pode-se ter $x = y$ mas se $\{x, y\}$ é um conjunto com dois elementos tem-se necessariamente $x \neq y$.

Mostraremos agora como usar $\mathbb{R}^2$ para obter um modelo aritmérico de um plano.

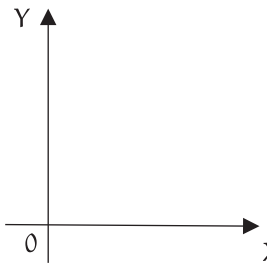


Figura 2.1 - Um sistema de coordenadas cartesianas.

Um *sistema de coordenadas* (cartesianas) no plano Π consiste num par de eixos perpendiculares OX e OY contidos nesse plano, com a mesma origem O. OX chama-se o eixo das *abcissas* e OY é o eixo das *ordenadas*. O sistema é indicado com a notação OXY.

A escolha de um sistema de coordenadas no plano Π permite estabelecer uma correspondência biunívoca $\Pi \to \mathbb{R}^2$. A cada ponto P do plano Π fazemos corresponder um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Os números x e y são as *coordenadas* do ponto P relativamente ao sistema OXY : x é a *abcissa* e y é a *ordenada* de P. As coordenadas x, y do ponto P são definidas do seguinte modo:

Se P estiver sobre o eixo OX, o par ordenado que lhe corresponde é $(x, 0)$, onde x é a coordenada de P no eixo OX, conforme explicado na seção anterior. Se P estiver sobre o eixo OY, a ele corresponde o par $(0, y)$, onde y é a coordenada de P nesse eixo. Se P não está em qualquer dos eixos, traçamos por P uma paralela ao eixo OY, a qual corta OX no ponto de coordenada x e uma paralela ao eixo OX, a qual corta OY no ponto de coordenada y. Então x será a abcissa e y a ordenada do ponto P. Noutras palavras, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é o par ordenado de números reais que corresponde ao ponto P.

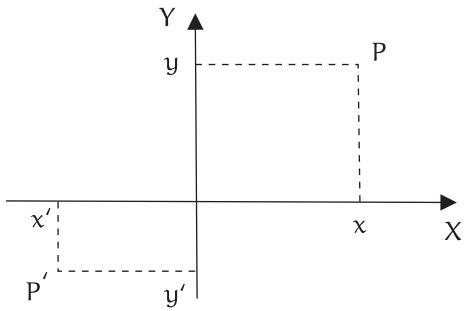


Figura 2.2 - As duas coordenadas do ponto P são positivas e as de P' são negativas.

O ponto O, origem do sistema de coordenadas, tem abcissa e ordenada ambas iguais a zero. Assim, a ele corresponde o par $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Se x é a abcissa e y é a ordenada do ponto P, o ponto P' de coordenadas $(x, 0)$ chama-se a *a projeção de* P *sobre o eixo* OX enquando o ponto P'', de coordenada $(0, y)$, é chamado a *projeção de* P *sobre o eixo* OY.

O emprego de coordenadas no plano serve a dois propósitos que se complementam. O primeiro é o de atribuir um significado geométrico (e com isto dar um maior conteúdo intuitivo) a fatos de natureza numérica, como o comportamento de uma função real de uma variável real, que ganha muito em clareza quando se olha para seu gráfico. O segundo propósito do uso das coordenadas vai no sentido oposto: recorre-se a elas a fim de resolver problemas da Geometria. Este é o objetivo da Geometria Analítica. No primeiro caso, a ênfase recai sobre a correspondência $\mathbb{R}^2 \to \Pi$ e no segundo sobre sua inversa $\Pi \to \mathbb{R}^2$. Na prática, esses dois pontos de vista se entrelaçam: para estabelecer os fatos iniciais da Geometria Analítica usam-se os resultados básicos da Geometria Euclidiana.

Em princípio o plano Π, cujos elementos são pontos, não é a mesma coisa que o conjunto $\mathbb{R}^2$, cujos elementos são pares de números reais. Entretanto, quando fixarmos um sistema de coordenadas em Π, usaremos a correspondência $\Pi \to \mathbb{R}^2$ para identificar cada ponto P do plano com o par ordenado (x, y) que lhe corresponde. Assim, escrevemos $P = (x, y)$ querendo dizer com isto que P é o ponto do plano cuja abcissa é x e cuja ordenada é y.

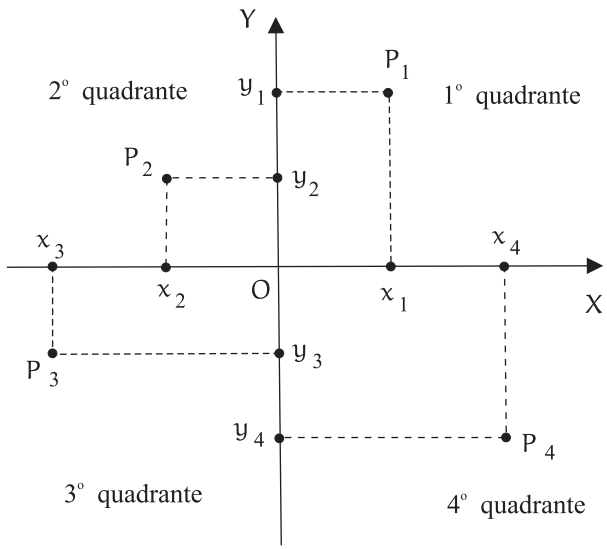


Figura 2.3 - Coordenadas cartesianas e quadrantes do plano.

Os eixos ortogonais OX e OY decompõem o plano Π em quatro regiões, cada uma das quais se chama um *quadrante*. O primeiro quadrante é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. O segundo quadrante é formado pelos pontos $P = (x, y)$ com $x \leq 0$ e $y \geq 0$. O terceiro, pelos pontos $P = (x, y)$ com $x \leq 0$ e $y \leq 0$. Finalmente, os pontos $P = (x, y)$ do quarto quadrante são aqueles em que $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

Fixando o sistema de coordenadas OXY no plano Π, o primeiro e o terceiro quadrantes formam dois ângulos retos, opostos pelo vértice. Os pontos $P = (x, y)$ da bissetriz comum desses dois ângulos são (como todos os pontos de uma bissetriz) equidistantes dos lados, logo têm abcissa e ordenada iguais (ambas positivas no primeiro quadrante e ambas negativas no terceiro). Esta reta Δ chama-se a *diagonal* do plano Π (relativamente ao sistema OXY). Tem-se portanto $P = (x, y) \in \Delta$ se, e somente se, $x = y$.

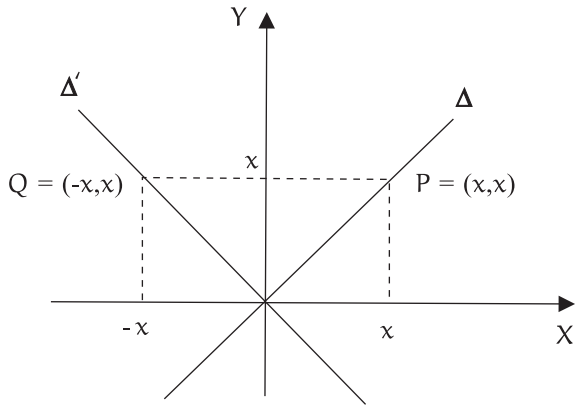


Figura 2.4 - As diagonais do plano.

Analogamente, um ponto $Q = (x, y)$ pertence à bissetriz Δ' comum ao segundo e quarto quadrantes se, e somente se, $x = -y$.

Quando se toma no plano um sistema de coordenadas OXY, chama-se *sentido positivo de rotação* (ou sentido anti-horário) ao sentido da rotação de $90°$ que leva o semi-eixo positivo OX sobre o semi-eixo positivo OY.

Dado o ponto $P = (x, y)$, submetamos o segmento de reta OP a uma rotação de $90°$ no sentido positivo em torno do ponto O, obtemos assim o segmento OQ. Quais são as coordenadas do ponto Q?

A rotação de $90°$ no sentido positivo leva o ponto $(x, 0)$ no ponto

$(0, x)$, logo transforma o retângulo que tem diagonal OP e dois lados sobre os eixos (vide figura 2.6) no retângulo de diagonal OQ com dois lados sobre os eixos. Segue-se que $Q = (-y, x)$.

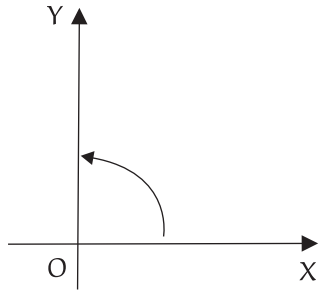


Figura 2.5 - Sentido positivo de rotação.

Se tivéssemos submetido o segmento OP a uma rotação de $-90°$ (isto é, de $90°$ no sentido negativo), teríamos obtido o segmento OQ', onde $Q' = (y, -x)$.

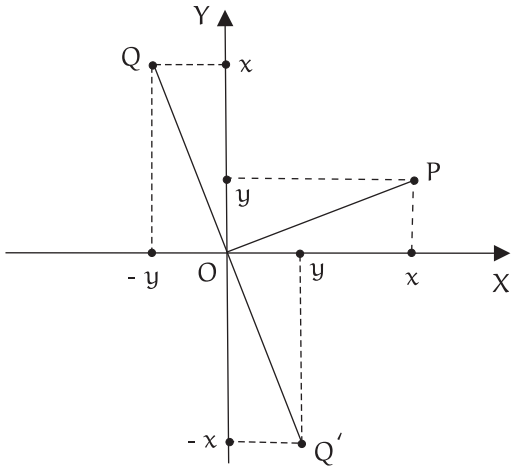


Figura 2.6 - Submetendo o segmento OP à rotação de $\pm 90°$

Exemplo 2.1 O vértice do ângulo reto do triângulo retângulo isósceles OAB é a origem O do sistema de coordenadas. Sabendo que $A = (3, 5)$, quais são as coordenadas do vértice B? Esta pergunta admite duas

respostas, ambas corretas. O cateto OB resulta de OA por uma rotação de 90°. Se o sentido da rotação for positivo então $B' = (-5, 3)$. Caso a rotação seja feita no sentido negativo, tem-se $B = (5, -3)$.

Exercícios

1. Diz-se que o ponto A' é o *simétrico* do ponto A em relação à reta r quando r é a mediatriz do segmento AA'. Sabendo que $A = (x, y)$, determine os simétricos de A em relação aos eixos OX e OY respectivamente.

2. O conjunto r, formado pelos pontos $(x, 5)$, cujas ordenadas são iguais a 5, é uma reta paralela ao eixo OX. Determine o simétrico do ponto $P = (3, -2)$ em relação à reta r.

3. Enuncie e responda uma questão análoga à do exercício anterior, com a reta $r' = \{(a, y); y \in \mathbb{R}\}$, paralela ao eixo OY, e o ponto $P = (c, d)$.

4. Para cada uma das equações abaixo, descreva o conjunto dos pontos (x, y) cujas coordenadas satisfazem essa equação:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
b) $y^2 - 6y + 9 = 0$;
c) $x^2 + y^2 + 1 = 0$;
d) $|x| + y = 0$;
e) $(x^2 - 7x + 10)(y^2 - 7x + 6) = 0$;
f) $(x^2 + 1)(x - y) = 0$;
g) $x^3 + x - x^2y - y = 0$.

5. Esboce o conjunto $X = \{(x, y); |y| \leq x \leq 3\}$.

6. Em cada um dos casos abaixo, esboce o conjunto dos pontos cujas coordenadas x, y cumprem as condições especificadas:

a) $|x - 3| < 1$;
b) $|x - 3| = 1$;
c) $|x - 3| \leq 1$ e $|y - 2| \leq 5$;
d) $|x - 3| \leq 1$ ou $|y - 2| \leq 5$;
e) $|x| \geq 2$ e $|y| \geq 3$;
f) $0 \leq x \leq y \leq 1$;
g) $xy = 0$;
h) $x > y$;
i) $x \geq y$;
j) $x^2 < y^2$;
k) $x^2 \leq y^2$.

7. Dado $A = (x, y)$ com $x \neq y$, observe que os pontos $B = (x, x), C = (y, x)$ e $D = (y, y)$ formam, juntamente com A, os vértices de um quadrado de lados paralelos aos eixos. A partir daí determine o simétrico de A relativamente à diagonal $\Delta = \{(x, x); x \in \mathbb{R}\}$.

8. Com argumento análogo ao do exercício anterior, determine o simétrico do ponto $A = (x, y)$ em relação à diagonal $\Delta' = \{(x, -x);\ x \in \mathbb{R}\}$.

9. Qual é o ponto da diagonal Δ mais próximo de $P = (x, y)$? E da diagonal Δ'? (Use as coordenadas do ponto médio de um segmento. V. Seção 3.)

10. O ponto X' chama-se o *simétrico* do ponto X em relação ao ponto A quando A é o ponto médio do segmento XX'. Qual é o simétrico do ponto $X = (x, y)$ em relação ao ponto $A = (a, b)$? Em particular, qual é o simétrico de X em relação à origem $O = (0, 0)$?

11. Determine as coordenadas do simétrico do ponto $P = (2, -3)$ em relação

a) ao eixo OX;

b) ao eixo OY;

c) à diagonal Δ;

d) ao ponto $(-3, 2)$.

12. Três vértices de um retângulo são $O = (0, 0), A = (a, a)$ e $B = (-b, b)$. Qual é o quarto vértice?

13. Qual é o comprimento da projeção ortogonal do segmento AB sobre o eixo OX? Sabe-se que $A = (1, 2)$ e $B = (-3, 4)$.

14. Todos os pontos P de uma certa reta r têm ordenada igual a três vezes sua abcissa. Mostre que r passa pela origem O. Qual é a relação entre a ordenada e a abcissa de um ponto Q pertencente à reta s, perpendicular a r a partir de O?

15. Se somarmos a mesma constante às ordenadas de três pontos colineares, mostre que se obtêm ainda três pontos colineares. Conclua que, para todo $a \in \mathbb{R}$ os conjuntos $X = \{(x, x + a); x \in \mathbb{R}\}$ e $Y = \{(x, -x + a); x \in \mathbb{R}\}$ são retas, paralelas às diagonais Δ e Δ' respectivamente.

16. Identifique o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $0 \leq x \leq y \leq 1 - x$.

3

Segmentos de Reta no Plano

Vimos na seção anterior como girar de $90°$ o segmento OP em torno do ponto O.

Outro exemplo de como exprimir um fato geométrico de forma analítica é o seguinte.

Dados os pontos $A = (a, b)$ e $A' = (a', b')$, quais são as coordenadas do ponto médio $M = (x, y)$ do segmento de reta AA'?

A resposta é

$$x = \frac{a + a'}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{b + b'}{2}$$

e a ela chegaremos usando um pouco de Geometria Plana.

Suponhamos inicialmente que $a \neq a'$ e $b \neq b'$, isto é, o segmento AA' não é vertical (paralelo ao eixo OY) nem horizontal (paralelo ao eixo OX). Então, considerando os pontos $P = (x, b)$ e $Q = (a', y)$, vemos que APM e MQA' são triângulos retângulos cujas hipotenusas AM e MA' têm o mesmo comprimento, já que M é o ponto médio de AA'. Além disso, os ângulos agudos $P\hat{A}M$ e $Q\widehat{M}A'$ são congruentes porque os lados AP e MQ são paralelos. Portanto APM e MQA' são triângulos congruentes.

Daí resulta que os segmentos AP e MQ têm o mesmo comprimento. Logo, pondo $A_0 = (a, 0), M_0 = (x, 0)$ e $A'_0 = (a', 0)$, concluímos que M_0 é o ponto médio do segmento $A_0A'_0$ no eixo OX. Segue-se então que $x = (a + a')/2$, conforme vimos na Seção 1. De modo análogo se vê que $y = (b + b')/2$.

Quando o segmento AA' é horizontal (isto é, $b = b'$) ou vertical ($a = a'$), o argumento acima se simplifica, reduzindo-se imediatamente

ao caso do ponto médio de um segmento localizado sobre um eixo, conforme tratado na Seção 1.

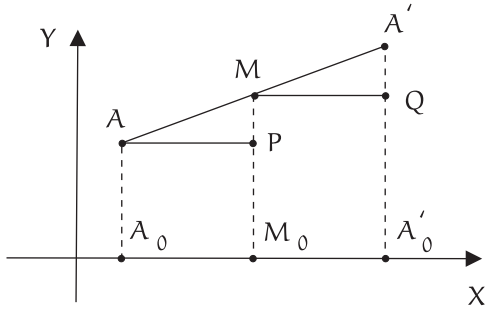


Figura 3.1 - O ponto médio M do segmento AA'.

Responderemos agora a pergunta mais geral seguinte: dados os pontos $A = (a, b), A' = (a', b')$ e o número real t, com $0 \leq t \leq 1$, quais são as coordenadas do ponto $X_t = (x_t, y_t)$, situado sobre o segmento AA', de tal modo que $d(A, X_t)/d(A, A') = t$?

Diz-se, neste caso, que o ponto X_t divide o segmento AA' na razão t.

Esta pergunta foi feita na Seção 1, com os pontos A, A' localizados sobre um eixo, e a resposta foi dada em termos da única coordenada que cada um desses pontos tem naquele eixo. Pelo que vimos lá, se $A = (a, 0)$ e $A' = (a', 0)$ estiverem sobre o eixo OX então $X_t = (x_t, 0)$, com $x_t = (1 - t)a + ta' = a + t(a' - a)$. Analogamente, se $A = (0, b)$ e $A' = (0, b)$ pertencerem ao eixo OY então $X_t = (0, y_t)$, onde $y_t = (1 - t)b + tb' = b + t(b' - b)$. Segue-se daí que $X_t = ((1-t)a+ta', b)$ quando $b = b'$, ou seja, quando AA' é horizontal, e $X_t = (a, (1 - t)b + tb')$ quando AA' é vertical, isto é, quando $a = a'$.

Quando $a \neq a'$ e $b \neq b'$, ou seja, quando o segmento AA' não é paralelo a qualquer dos eixos, um argumento muito parecido com o anterior se aplica, só que agora é mais conveniente comparar os triângulos retângulos APX_t e AQA' com $P = (x_t, b)$ e $Q = (a', b)$. Estes triângulos são semelhantes, pois têm um ângulo agudo comum. A razão de semelhança é $d(A, X_t)/d(A, A') = t$, portanto temos $d(A, P)/d(A, Q) = t$ ou seja, $(x_t - a)/(a' - a) = t$, e daí resulta $x_t = (1 - t)a + ta'$. Analogamente, $y_t = (1 - t)b + tb'$(com o mesmo valor de t!). Podemos então enunciar:

Dados $A = (a, b)$ *e* $A' = (a', b')$ *as coordenadas do ponto* $X_t = (x_t, y_t)$ *do segmento* AA' *tal que* $d(A, X_t)/d(A, A') = t$ *são*

$$x_t = (1-t)a + ta' \quad \text{e} \quad y_t = (1-t)b + tb'.$$

Em particular, quando $t = 1/2$ reobtemos as coordenadas $x_{1/2} = (a + a')/2$ e $y_{1/2} = (b + b')/2$ do ponto médio de AA'.

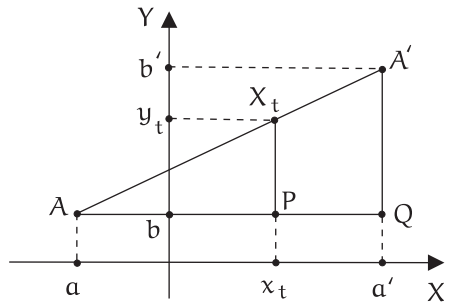


Figura 3.2 - A razão $\overline{AX}_t/\overline{AA'}$ é igual a t.

Note ainda que, para $t = 0$, temos $X_0 = A$ e, para $t = 1$, resulta $X_1 = A'$.

A expressão $X_t = ((1-t)a + ta', (1-t)b + tb')$, quando t varia de 0 a 1, fornece todos os pontos do segmento de reta AA', onde $A = (a, b)$ e $A' = (a', b')$. A função $t \mapsto X_t$, cujo domínio é o intervalo [0,1] e cujo contra-domínio é o segmento de reta AA', chama-se uma *parametrização* desse segmento e a variável t chama-se o *parâmetro*.

Se, na expressão que fornece as coordenadas do ponto X_t, permitirmos que o parâmetro t assuma todos os valores reais, obteremos todos os pontos da reta AA', não apenas os do segmento. Quando $t \geq 0, X_t$ percorre a semi-reta de origem A que contém o ponto A'. Quando $t < 0, X_t$ percorre a semi-reta oposta. Portanto, quando t varia em $\mathbb{R}$, a função $t \mapsto X_t$, de domínio $\mathbb{R}$, é uma parametrização da reta AA'.

Em particular, a reta OA, que contém a origem O e o ponto $A = (a, b)$, é formada pelos pontos $X = (ta, tb)$, obtidos com $t \in \mathbb{R}$ qualquer. Quando $t > 0$, temos os pontos da semi-reta $\overrightarrow{OA}$ e quando $0 \leq t \leq 1$ temos os pontos do segmento de reta OA.

Exemplo 3.1 Dados os pontos $A = (1, 2), A' = (3, 5), B = (2, 4)$ e $B' = (3, 2)$, achar as coordenadas do ponto de interseção dos segmentos AA' e BB'.

Como vimos acima, os pontos do segmento AA' são os da forma

$$((1-s)\cdot 1 + s\cdot 3, (1-s)2 + s\cdot 5) = (1+2s, 2+3s),$$

com $0 \leq s \leq 1$. Analogamente, os pontos do segmento BB' têm a forma

$$((1-t)\cdot 2 + t\cdot 3, (1-t)4 + t\cdot 2) = (2+t, 4-2t),$$

com $0 \leq t \leq 1$.

Se o ponto pertence a ambos os segmentos, devem existir $s, t \in [0,1]$ tais que

$$\begin{cases} 1+2s = 2+t \\ 2+3s = 4-2t \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} 2s-t = 1 \\ 3s+2t = 2. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $s = 4/7$ e $t = 1/7$.

Portanto os segmentos AA' e BB' se intersectam no ponto

$$P = (1+2s, 2+3s) = (\frac{15}{7}, \frac{26}{7})$$

ou, o que é o mesmo,

$$P = (2+t, 4-2t) = (\frac{15}{7}, \frac{26}{7}).$$

As coordenadas do ponto médio de um segmento vão ajudar-nos a responder outra pergunta de natureza geométrica.

Diz-se que um segmento de reta está *orientado* quando se escolheu um dos seus pontos extremos para ser o ponto inicial (e o outro será o ponto final). Quando escrevemos "o segmento orientado AB" estamos querendo dizer que A é o ponto inicial e B é o ponto final do segmento. Do contrário, escreveríamos "o segmento orientado BA".

Por exemplo, quando dizemos que o ponto X_t divide o segmento AA' na razão t, estamos tacitamente admitindo que se trata do segmento orientado AA' pois o mesmo ponto divide o segmento (orientado) $A'A$ na razão $1-t$.

Uma questão simples que ocorre com freqüência é a seguinte. São dados o segmento de reta orientado AA', com $A = (a, b)$, $A' = (a', b')$, e o ponto $C = (c, d)$, fora da reta AA'.

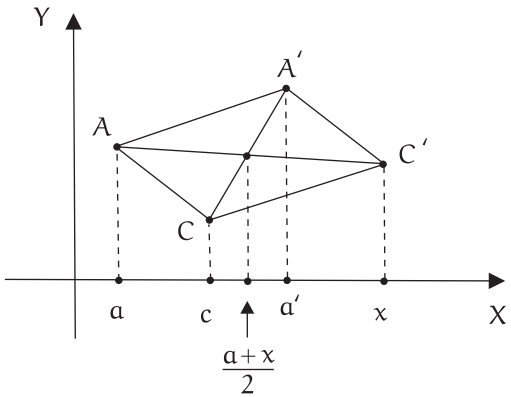


Figura 3.3 - Determinando as coordenadas de C'.

Quer-se determinar as coordenadas do ponto $C' = (x, y)$ de modo que CC' seja o segmento orientado (começando em C) obtido quando se translada AA' paralelamente até fazer A coincidir com C. Em termos mais precisos: dados os pontos A, A' e C, quer-se obter C' tal que AA' e CC' sejam os lados opostos de um paralelogramo cujos outros lados opostos são AC e $A'C'$. Pomos $C' = (x, y)$ e nos propomos a calcular x e y.

Da Geometria Plana, sabemos que as diagonais de um paralelogramo cortam-se mutuamente ao meio. Assim os segmentos AC' e $A'C$ têm o mesmo ponto médio. Isto nos dá

$$\frac{a+x}{2} = \frac{a'+c}{2} \quad \text{e} \quad \frac{b+y}{2} = \frac{b'+d}{2}.$$

Daí $x = c + (a' - a)$ e $y = d + (b' - b)$.

Em particular, se transladarmos paralelamente o segmento AA' até fazer o ponto A coincidir com a origem $O = (0, 0)$ do sistema de coordenadas então o ponto A' cairá sobre $C' = (a' - a, b' - b)$.

Nas condições da discussão acima (isto é, quando CC' se obtém de AA' por um deslocamento paralelo de modo a fazer A coincidir com C), costuma-se dizer que o segmento AA' e CC' são *equipolentes*. Portanto, se $A = (a, b), A' = (a', b'), C = (c, d)$ e $C' = (c', d')$ os segmentos AA', CC', não situados sobre a mesma reta, são equipolentes se, e somente se, tem-se

$$a' - a = c' - c \quad \text{e} \quad b' - b = d' - d.$$

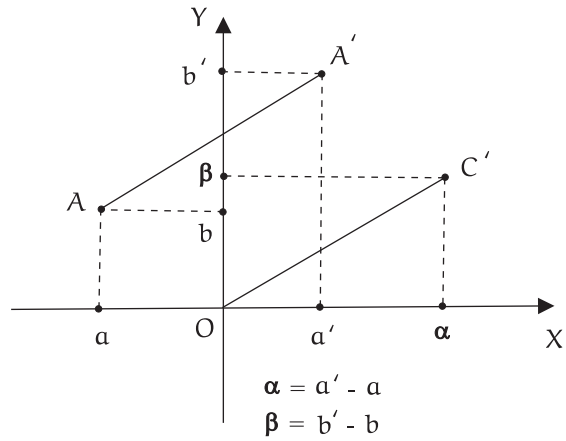


Figura 3.4 - Segmentos equipolentes OC' e AA'.

Quando os dois segmentos estão sobre a mesma reta, diremos ainda que eles são equipolentes quando estas igualdades se verificarem. Em qualquer caso, estas igualdades significam que AC' e $A'C$ têm o mesmo ponto médio.

Exemplo 3.2 Efetuando sobre o segmento AC, com $A = (a, b)$ e $C = (c, d)$, um giro de $+90°$ em torno do ponto A, obtemos o segmento AC'. Quais serão as coordenadas do ponto C'?

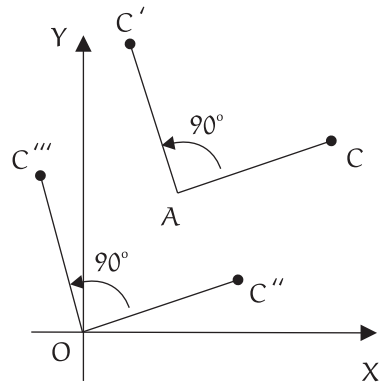


Figura 3.5 - Girando AC de $+90°$ em torno de A.

Transladamos o segmento AC de modo a fazer A cair sobre a origem, obtendo o segmento OC'', com $C'' = (c - a, d - b)$. Efetuamos um giro de $+90°$ do segmento OC'' em torno do O, obtendo OC''', com $C''' = (b-d, c-a)$. Em seguida, transladamos OC''' de modo a fazer O coincidir com A, obtendo o segmento AC', com $C' = (b-d+a, c-a+b)$. Este é o ponto procurado.

Vejamos um caso particular: se $A = (1,2)$ e $C = (3,4)$ então $C' = (2-4+1, 3-1+2) = (-1,4)$.

Observação 3.1 Em alguns exercícios abaixo, lembrar que se $A = (a,b)$ e $A' = (-b,a)$ então os segmentos OA e OA' são perpendiculares e congruentes.

Exercícios

1. Em cada um dos casos a seguir, decida se o segmento AA' corta um dos eixos, nenhum deles ou ambos. Determine o(s) ponto(s) de interseção quando existir(em).

a) $A = (-5,3), A' = (-1,-2)$;

b) $A = (2,-1), A' = (7,-15)$;

c) $A = (-3,-1), A' = (4,2)$.

2. Em cada um dos casos abaixo, determine (se existir) o ponto de interseção dos segmentos AA' e BB'. Se os segmentos não se intersectarem, decida se eles pertencem a retas concorrentes, paralelas ou coincidentes.

a) $A = (1,3), A' = (2,-1), B = (-1,1), B' = (4,1)$;

b) $A = (0,0), A' = (1,1), B = (3,4), B' = (-1,5)$;

c) $A = (1,234), A' = (0,123), B = (315,18), B' = (317,240)$;

d) $A = (2,5), A' = (3,6), B = (18,21), B' = (40,43)$.

3. Um dos vértices do quadrado $OABC$ é a origem e o outro é o ponto $A = (2,3)$. Quais são as coordenadas dos pontos B e C?

(*Observação*: SEMPRE que mencionarmos um polígono, letras adjacentes indicarão vértices adjacentes.)

4. No quadrado $ABCD$, tem-se $A = (-1,-3)$ e $B = (5,6)$. Quais são as coordenadas dos vértices C e D?

5. Dados $A = (0,3)$ e $B = (5,y)$, ache y de modo que o segmento AB seja paralelo à diagonal Δ. O ponto C tem abcissa x e pertence à mesma reta AB. Qual é a ordenada de C?

6. Responda as perguntas do exercício anterior com a diagonal Δ', e depois com o eixo OX, em lugar da diagonal Δ.

7. Sejam $A = (2, -5)$ e $B = (5, -2)$. Dê exemplo de dois outros pontos C, D, tais que as retas AB e CD sejam perpendiculares.

8. Tem-se $A = (2,5), B = (4,2), C = (3,4)$ e $D = (0, y)$. Para qual valor de y as retas AB e CD são perpendiculares?

9. $ABCD$ é um paralelogramo. Sabe-se que $A = (1,3), B = (2,5)$ e $C = (6,4)$. Quais são as coordenadas do vértice D? E do ponto M, interseção das diagonais AC e BD?

10. Se X_t é o ponto do segmento AB tal que $d(A, X_t)/d(A, B) = t$, quanto vale $d(A, X_t)/d(X_t, B)$?

11. Sejam $A = (a, b)$ e $C = (c, d)$ pontos diferentes de $O = (0, 0)$. Prove que se O, A e C são colineares então $c = ta$ e $d = tb$ para algum $t \in \mathbb{R}$.

4

A Distância entre Dois Pontos

Se os pontos $P = (x, y)$ e $Q = (x', y)$ têm a mesma ordenada y então a distância $d(P, Q)$ entre eles é igual à distância

$$|x' - x| = \sqrt{(x - x')^2}$$

entre suas projeções sobre o eixo OX. Analogamente, se $P = (x, y)$ e $Q' = (x, y')$ têm a mesma abcissa x então

$$d(P, Q') = |y' - y| = \sqrt{(y - y')^2},$$

que é igual à distância entre as projeções de P e Q sobre o eixo OY.

Se, entretanto, $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ têm abcissas e ordenadas diferentes então, considerando o ponto $S = (u, y)$, vemos que PSQ é um triângulo retângulo cuja hipotenusa é PQ. Como P e S têm a mesma ordenada, enquanto S e Q têm a mesma abcissa, segue-se que

$$d(P, S) = |x - u| \quad \text{e} \quad d(S, Q) = |y - v|.$$

Pelo Teorema de Pitágoras, podemos escrever

$$d(P, Q)^2 = d(P, S)^2 + d(S, Q)^2.$$

Portanto,

$$d(P, Q)^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2,$$

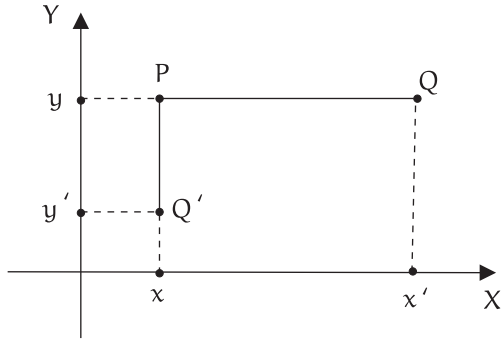


Figura 4.1 - $d(P,Q) = \sqrt{(x-x')^2}$ e $d(P,Q') = \sqrt{(y-y')^2}$.

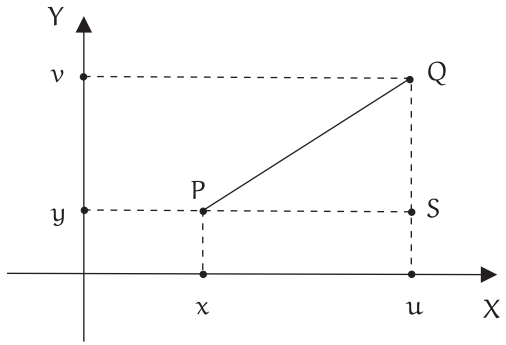


Figura 4.2 - Obtendo $d(P,Q)$ via Pitágoras.

logo

$$d(P,Q) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}.$$

Em particular, a distância do ponto $P = (x, y)$ à origem $O = (0, 0)$ é

$$d(O,P) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

A fórmula da distância entre dois pontos, dada em termos das coordenadas desses pontos, serve de partida para um grande número de resultados da Geometria Analítica.

Vejamos um exemplo.

Dados os pontos $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$, qual é a condição, em termos dessas coordenadas, que assegura o perpendicularismo dos segmentos OP e OQ, onde $O = (0, 0)$ é a origem?

Pelo Teorema de Pitágoras, os segmentos OP e OQ são perpendiculares se, e somente se,

$$d(P, Q)^2 = d(O, P)^2 + d(O, Q)^2.$$

A fórmula da distância entre dois pontos nos permite escrever esta equação como

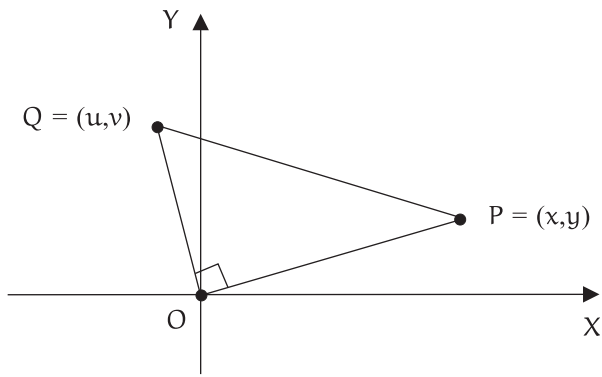


Figura 4.3 - $OP \perp OQ$ se, e somente se, $ux + vy = 0$.

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = x^2 + y^2 + u^2 + v^2,$$

ou seja:

$$x^2 - 2ux + u^2 + y^2 - 2vy + v^2 = x^2 + y^2 + u^2 + v^2.$$

Simplificando:

$$-2ux - 2vy = 0$$

e daí

$$ux + vy = 0.$$

A igualdade $ux + vy = 0$ *expressa portanto a condição necessária e suficiente para que os segmentos* OP *e* OQ *sejam perpendiculares, quando* O *é a origem,* $P = (x, y)$ *e* $Q = (u, v)$.

Se os segmentos perpendiculares OP e OQ têm o mesmo comprimento então OQ resulta de OP por uma rotação de $90°$ em torno da origem. Neste caso, como vimos no final da Seção 1, se $P = (x, y)$ então $Q = (-y, x)$ ou $Q = (y, -x)$, conforme a rotação seja no sentido positivo ou negativo. É claro que $x(-y) + yx = 0$ e $xy + y(-x) = 0$, confirmando que OP e OQ são perpendiculares.

Mais geralmente, sejam $A = (a, b), A' = (a', b'), C = (c, d)$ e $C' = (c', d')$ com $A \neq A'$ e $C \neq C'$. Qual é a condição em termos dessas coordenadas que assegura serem perpendiculares os segmentos de reta AA' e CC' ?

Transladando paralelamente os segmentos AA' e CC' de modo a fazer os pontos A e C coincidirem com a origem $O = (0, 0)$, obtemos os pontos $A'' = (\alpha, \beta)$ e $C'' = (\gamma, \delta)$ tais que OA'' é paralelo a AA' e OC'' é paralelo a CC'.

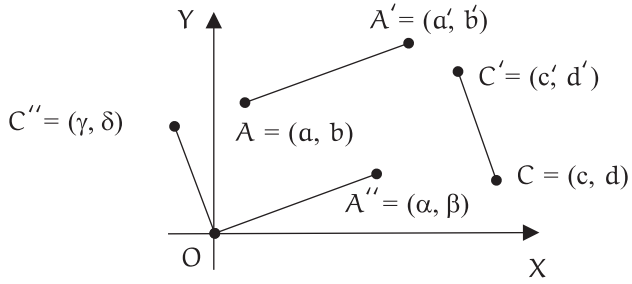


Figura 4.4 - Perpendicularismo de segmentos quaisquer.

Como vimos no final da Seção 3, $\alpha = a' - a, \beta = b' - b, \gamma = c' - c, \delta = d' - d$.

Além disso, os segmentos AA' e CC' são perpendiculares se, e somente se, $OA'' \perp OC''$, ou seja $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$.

Assim, a condição de perpendicularismo dos segmentos de reta AA' e CC' se exprime, em termos das coordenadas dos pontos extremos desses segmentos, como

$$(a' - a)(c' - c) + (b' - b)(d' - d) = 0.$$

Exemplo 4.1 Sejam $A = (4, 5), B = (-2, 8)$ e $C = (5, 7)$. O triângulo ABC é retângulo e seus catetos são AB e AC. Com efeito, os segmentos

AB e AC são perpendiculares, pois

$$(5-4)(-2-4)+(7-5)(8-5)=1\cdot(-6)+2\cdot 3=-6+6=0.$$

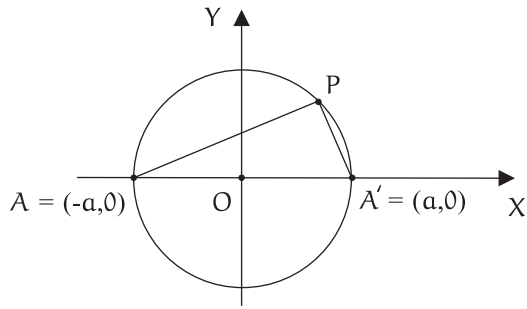


Figura 4.5 - $AP\perp A'P$ se, e somente se, P pertence à circunferência de centro O e raio a.

Exemplo 4.2 Dados os pontos $A=(-a,0)$ e $A'=(a,0)$, com $a>0$, vejamos que condição devem satisfazer as coordenadas do ponto $P=(x,y)$ a fim de que os segmentos AP e $A'P$ sejam perpendiculares. De acordo com a condição de perpendicularismo, a condição procurada é $(x+a)(x-a)+y\cdot y=0$, ou seja, $x^2+y^2=a^2$. Portanto, AP e $A'P$ são perpendiculares se, e somente se, a distância do ponto P à origem é a. Isto significa que P pertence à circunferência de centro O que tem diâmetro AA'.

A condição de perpendicularismo é um caso particular da fórmula que dá o cosseno do ângulo entre duas direções. Com efeito, duas retas são perpendiculares se, e somente se, o cosseno do ângulo entre elas é igual a zero. Levados por esta observação, vamos obter a fórmula do cosseno do ângulo entre dois segmentos. Comecemos com uma situação especial.

Sejam $P=(x,y)$ e $Q=(u,v)$ pontos situados à distância 1 da origem $O=(0,0)$. Então, se α e β são, respectivamente, as medidas em radianos dos ângulos do eixo OX com os segmentos OP e OQ, temos $x=\cos\alpha, y=\sin\alpha, u=\cos\beta$ e $v=\sin\beta$. O ângulo do segmento OP com o segmento OQ mede então $\theta=\beta-\alpha$ radianos. Como se sabe da trigonometria tem-se.

$$\cos\theta=\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\sin\alpha=ux+vy.$$

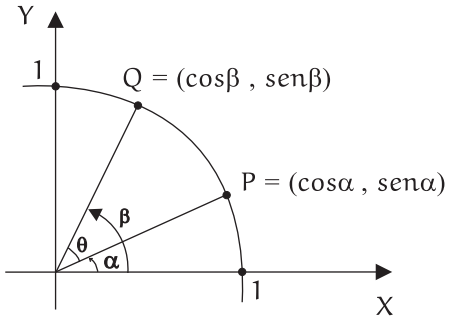


Figura 4.6 - Os pontos P e Q distam 1 da origem.

Se, $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ forem pontos diferentes de $O = (0, 0)$ mas os comprimentos dos segmentos OP e OQ não forem necessariamente iguais a 1, tomamos

$$s = 1/\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad t = 1/\sqrt{u^2 + v^2}.$$

Então os pontos $P' = (sx, sy)$ e $Q' = (tu, tv)$ estão sobre os segmentos OP e OQ respectivamente, agora com $d(O, P') = d(O, Q') = 1$.

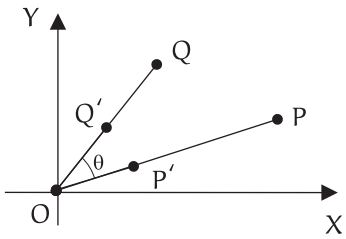


Figura 4.7 - P e Q são arbitrários mas P' e Q' distam 1 da origem.

O ângulo θ entre OP e OQ é o mesmo que entre OP' e OQ'. Do que acabamos de ver resulta então que $\cos\theta = tu \cdot sx + tv \cdot sy = st(ux + vy)$, ou seja, que

$$\cos\theta = \frac{ux + vy}{\sqrt{u^2 + v^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Esta é, portanto, a fórmula do cosseno do ângulo entre os segmentos de reta OP *e* OQ*, onde* $O = (0, 0), P = (x, y)$ *e* $Q = (u, v)$.

Como $\cos(-\theta) = \cos\theta$, é indiferente considerar o ângulo orientado de OP para OQ ou vice-versa.

Se, tivermos dois segmentos de reta AA' e CC', com extremidades distintas, e quisermos obter o cosseno do ângulo entre eles em função das coordenadas $A = (a, b), A' = (a', b'), C = (c, d)$ e $C' = (c', d')$, transladaremos esses segmentos de modo a fazer A e C cairem sobre O, obtendo assim os segmentos OA'' e OC'', paralelos a AA' e CC' respectivamente. O ângulo entre AA' e CC' será o mesmo que entre OA'' e OC''. Como já vimos, tem-se $A'' = (a'-a, b'-b)$ e $C'' = (c'-c, d'-d)$. Portanto, se θ é o ângulo entre AA' e CC', tem-se

$$\cos\theta = \frac{(a'-a)(c'-c) + (b'-b)(d'-d)}{\sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2} \cdot \sqrt{(c'-c)^2 + (d'-d)^2}}. \qquad (.1)$$

Deve-se observar que se os segmentos AA' e CC' têm extremidades distintas, o ângulo θ entre eles só fica bem definido quando os orientamos, isto é, quando especificamos em cada um deles qual é o ponto inicial e qual o ponto final. No argumento acima, a dicussão admitiu tacitamente que os pontos iniciais dos segmentos AA' e CC' são A e C. Caso A' fosse o ponto inicial do primeiro segmento e C do segundo, o ângulo entre eles seria o suplemento de θ e o cosseno mudaria de sinal.

Portanto, a fórmula acima dá o cosseno de ângulo entre dois segmentos *orientados*. Caso os segmentos dados tenham uma extremidade comum (como OP e OQ acima), esta extremidade é, naturalmente, tomada como o ponto inicial de ambos.

Exemplo 4.3 Se $A = (1, 2), B = (1+\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ e $C = (2+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3})$ então o cosseno do ângulo formado pelos segmentos AB e AC é

$$\begin{aligned}\cos\theta = & \frac{(1+\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3}-1) + (2+\sqrt{3}-2)(3-\sqrt{3}-2)}{\sqrt{(1+\sqrt{3}-1)^2 + (2+\sqrt{3}-2)^2} \cdot \sqrt{(2+\sqrt{3}-1)^2 + (3-\sqrt{3}-2)^2}} \\ = & \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Conseqüentemente, os segmentos AB e AC formam um ângulo de $60°$.

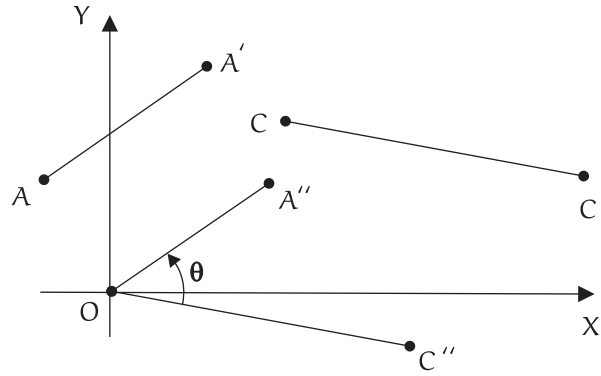


Figura 4.8 - O ângulo θ entre os segmentos orientados AA' e CC'.

Exercícios

1. O triângulo ABC, com $A = (-a, 0), B = (a, 0)$ e $C = (0, y)$ é equilátero. Quais são os valores possíveis de y?

2. Dados $A = (2, 5)$ e $C = (-8, 2)$, calcule os cossenos dos ângulos $O\widehat{A}C$ e $O\widehat{C}A$.

3. Em cada um dos casos abaixo, decida se o triângulo ABC tem um ângulo obtuso, um ângulo reto ou se seus três ângulos são agudos:
   a) $A = (0, 0), B = (3, 152), C = (-45, 1)$;
   b) $A = (1, 2), B = (2, -3), C = (4, 8)$;
   c) $A = (2, 3), B = (6, 7), C = (3, 10)$.

4. Sejam $A = (a, 0)$ e $B = (0, a)$, com $a \neq 0$. Ache x de modo que o ponto $C = (x, x)$ seja o terceiro vértice do triângulo equilátero ABC.

5. Qual ponto do eixo OX é equidistante dos pontos $A = (1, -3)$ e $B = (3, -1)$?

6. Sejam a, b, x e y diferentes de zero. Mostre que os pontos $A = (x, y), B = (a + x, b + y)$ e $C = (x - bc, y + ac)$ são vértices de um triângulo retângulo.

7. Sejam $A = (1, 3)$ e $B = (5, 7)$. Prove que o ponto $P = (x, y)$ pertence à mediatriz do segmento AB se, e somente se, $x + y = 8$. A partir daí, ache as coordenadas de um ponto C tal que o triângulo ABC seja equilátero.

8. Sejam $O = (0, 0), A = (a, b)$ e $C = (c, d)$. Prove que o triângulo OAC é equilátero se, e somente se,

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 2(a\,c + b\,d).$$

9. Sejam $A = (2, 1)$ e $B = (5, 1)$. Qual é o ponto C de abcissa 3 tal que AC é perpendicular a AB?

10. Ainda com $A = (2, -1)$ e $B = (5, 1)$, o ponto P tem abcissa x e AP é perpendicular a AB. Qual é a ordenada de P?

5

Escolhendo o Sistema de Coordenadas

Até agora, em todas as questões que abordamos temos considerado um sistema de coordenadas fixado no plano, o que nos permite identificar os pontos desse plano com elementos de $\mathbb{R}^2$ e desta maneira temos traduzido algumas propriedades geométricas em termos de relações numéricas entre essas coordenadas.

Mas se temos um problema geométrico (que não menciona coordenadas) e queremos resolvê-lo usando Geometria Analítica, temos a liberdade de introduzir no plano o sistema de coordenadas que acharmos mais conveniente para o nosso problema. Começamos com um caso bastante simples.

Exemplo 5.1 Seja ABC um triângulo retângulo cuja hipotenusa é BC. Seja M o ponto médio de BC. Queremos mostrar que o comprimento da mediana AM é igual à metade do comprimento da hipotenusa.

Um sistema de coordenadas conveniente para este problema é aquele em que as retas AB e AC são os eixos, portanto $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$ e $C = (0, c)$ são as coordenadas dos vértices. Então $M = (b/2, c/2)$. O comprimento da hipotenusa é

$$d(B, C) = \sqrt{b^2 + c^2}$$

e o comprimento da mediana é

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2},$$

o que prova a afirmação feita.

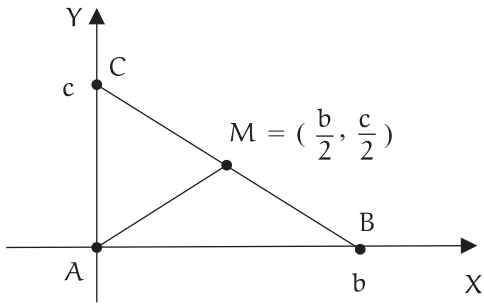


Figura 5.1 - A mediana que parte do vértice do ângulo reto é a metade da hipotenusa.

Uma escolha menos óbvia, mas ainda adequada para esta questão, é tomar um sistema de coordenadas cujo eixo OX contenha a hipotenusa, sendo a origem o ponto M. Agora temos $B = (-b, 0)$, $C = (b, 0)$, $A = (x, y)$. A condição de perpendicularismo entre AB e AC nos dá

$$(x - b)(x + b) + y^2 = 0,$$

ou seja, $x^2 - b^2 + y^2 = 0$, e daí $x^2 + y^2 = b^2$, o que significa $d(A, M)^2 = d(M, B)^2 = d(M, C)^2$. Portanto $d(A, M) = \frac{1}{2} d(B, C)$.

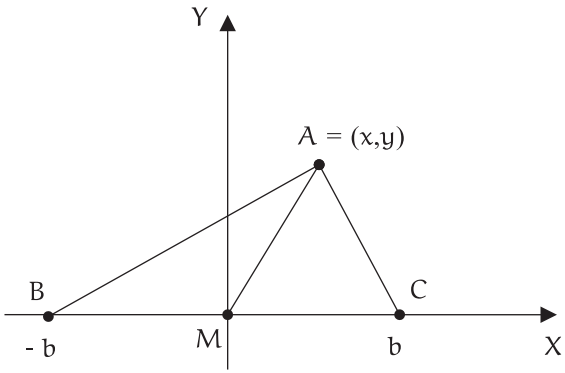


Figura 5.2 - Outro sistema de coordenadas para o mesmo problema.

Outra situação geométrica que pode ser resolvida com o auxílio de coordenadas, de forma extremamente elementar, é a seguinte.

Exemplo 5.2 Dados os pontos A e B no plano, determinar o conjunto dos pontos X tais que $d(X,A) = d(X,B)$ (pontos equidistantes de A e B).

Para responder a esta solicitação consideramos um sistema de coordenadas no qual o eixo OX contém o segmento AB e a origem O é o ponto médio desse segmento. Neste sistema, as coordenadas dos pontos dados são $A = (-a, 0)$ e $B = (a, 0)$, com $a > 0$. O ponto $X = (x, y)$ é equidistante de A e B se, e somente se, $d(X,A)^2 = d(X,B)^2$, isto é

$$(x + a)^2 + y^2 = (x - a)^2 + y^2.$$

Simplificando, vem $-2ax = 2ax$. Como $a \neq 0$, tem-se $x = 0$.

Portanto, os pontos do plano que são equidistantes de A e B são aqueles que estão sobre o eixo OY do sistema que escolhemos. Ora, esse eixo é a perpendicular ao segmento AB passando pelo seu ponto médio, ou seja, é a mediatriz deste segmento.

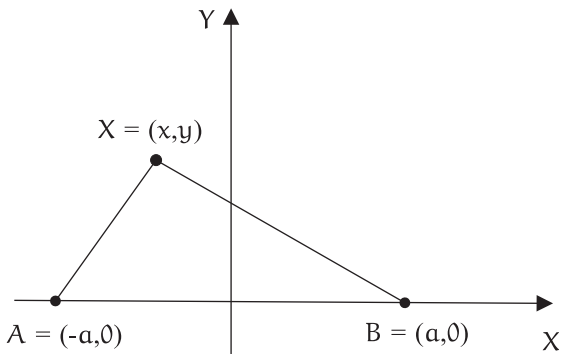


Figura 5.3 - A mediatriz de AB, neste sistema, é o eixo OY.

Exemplo 5.3 Dado o triângulo ABC, provar que suas três alturas se encontram no mesmo ponto.

Tomamos no plano o sistema de coordenadas no qual o eixo OX contém o lado AB e o eixo OY contém a altura baixada do vértice C sobre esse lado. Neste sistema, as coordenadas dos vértices A, B e C são $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$ e $C = (0, c)$, onde $c \neq 0$. A altura baixada do vértice

B encontra a altura OC no ponto $P = (0, y)$. Os segmentos BP e AC são perpendiculares. Utilizando-se a condição de perpendicularismo de dois segmentos obtemos $(0-b)(0-a)+(y-0)(c-0) = 0$, ou seja, $ab+cy = 0$. Por sua vez, a altura baixada do vértice A encontra a altura OC no ponto $Q = (0, z)$. Novamente, os segmentos AQ e BC são perpendiculares e utilizando a mesma relação obtemos $(0-a)(0-b)+(z-0)(c-0) = 0$, ou seja, $ab + cz = 0$. Vemos então que

$$z = y = -\frac{ab}{c},$$

portanto

$$P = Q = \left(0, -\frac{ab}{c}\right)$$

é o ponto de encontro das três alturas do triângulo ABC.

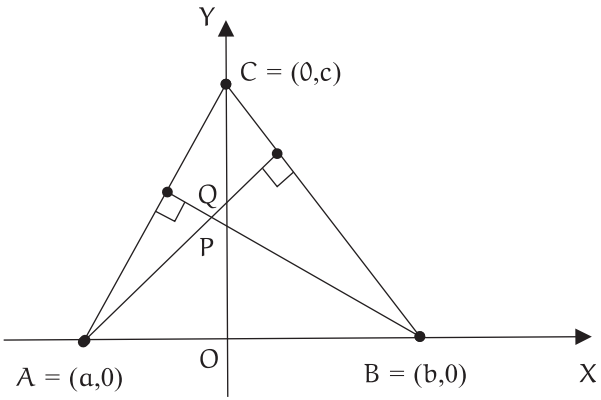


Figura 5.4 - Um cálculo simples mostra que $P = Q$.

Exemplo 5.4 Temos um retângulo ABCD, no qual o lado AB mede o dobro do lado BC e perguntamos qual é o menor ângulo formado por suas diagonais, isto é, qual a medida do ângulo entre os segmentos orientados AC e DB.

Escolhemos como origem o vértice A, ficando o vértice B sobre o eixo das abcissas e D sobre o das ordenadas.

Assim teremos $A = (0, 0)$, $B = (2a, 0)$, $C = (2a, a)$ e $D = (0, a)$. O

cosseno do menor ângulo formado pelas diagonais do retângulo é:

$$\cos\theta = \frac{(2a-0)(2a-0)+(a-0)(0-a)}{\sqrt{(2a)^2+a^2}\cdot\sqrt{(2a)^2+(-a)^2}} = \frac{3}{5}, \quad \text{logo } \theta = 53^0 7' 48''.$$

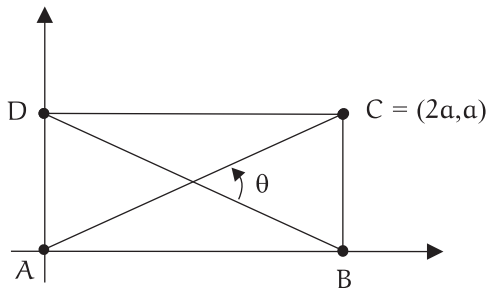


Figura 5.5 - O menor ângulo formado pelas diagonais do retângulo $ABCD$.

Exemplo 5.5 São dados dois pontos P e Q no plano e pergunta-se que forma tem o conjunto dos pontos M do plano tais que os quadrados de suas distâncias aos pontos P e Q respectivamente diferem por uma constante c.

Um sistema de eixos conveniente para este problema é aquele cujo eixo das abcissas contém P e Q e cuja origem é o ponto médio do segmento de reta PQ. Neste sistema, temos $P = (-a, 0)$ e $Q = (a, 0)$, onde $2a$ é a distância de P a Q. Queremos determinar o conjunto dos pontos $M = (x, y)$ tais que

$$d(M,P)^2 - d(M,Q)^2 = c,$$

isto é:

$$(x+a)^2 + y^2 - [(x-a)^2 + y^2] = c.$$

Simplificando, temos $4ax = c$, isto é, $x = c/4a$. Vemos que os pontos M que satisfazem a condição dada constituem uma reta, mais precisamente, uma perpendicular ao segmento PQ.

Exercícios

1. Dado um paralelogramo $ABCD$, escolha um sistema de coordenadas adequado e mostre que $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2 = \overline{AC}^2+\overline{BD}^2$ (a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das suas diagonais).

2. O triângulo ABC é equilátero e seu lado mede l. Num sistema de coordenadas em que a origem é equidistante de A, B, C e o ponto C está sobre o eixo OY, quais são as coordenadas dos três vértices?

3. "Num triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica das projeções (ortogonais) dos catetos sobre essa hipotenusa." Prove este fato escolhendo um sistema de coordenadas onde a hipotenusa está sobre o eixo OX e o vértice do ângulo reto sobre o eixo OY.

4. Escolhendo um sistema de coordenadas com origem no vértice A e com o ponto B sobre o eixo das abcissas, prove que as três medianas de um triângulo se encontram no mesmo ponto, o qual divide cada uma delas na razão $2/3$ a partir do vértice correspondente.

5. Chama-se *baricentro* de um triângulo ao ponto de interseção de suas três medianas. Determine as coordenadas do baricentro do triângulo ABC nos seguintes casos:

a) $A = (1,5)$, $B = (3,2)$, $C = (2,4)$;

b) $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$.

6. Se, no triângulo ABC, as medianas que partem dos vértices A e B são iguais, prove que os lados AC e BC são iguais, logo o triângulo é isósceles. [Escolha um sistema de eixos no qual $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$ e $C = (0, c)$.]

7. Várias vezes, nas páginas anteriores, foi citada e usada a propriedade de que as diagonais de um paralelogramo cortam-se mutuamente ao meio. Dado um paralelogramo $ABCD$, escolha um sistema de coordenadas adequado e use-o para provar a referida propriedade.

8. Prove que o segmento de reta que une os pontos médios das laterais de um trapézio é paralelo às bases e sua medida é a média aritmética das medidas das bases.

9. Dados os pontos A, B, determine o conjunto dos pontos do plano cuja soma dos quadrados de suas distâncias a A e B é igual a uma constante c.

6

Outros Tipos de Coordenadas

Dados dois eixos concorrentes quaisquer, o processo descrito na Seção 2 permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre pontos do plano e pares ordenados de números reais. Na maior parte dos casos não há motivo para se optar por um sistema de eixos não-ortogonais mas em algumas situações isto pode ser vantajoso. É possível desenvolver a Geometria Analítica usando eixos que formam ângulos diferentes de 90^0. Tal modificação afeta todas as propriedades ligadas ao conceito de distância. Outras propriedades (por exemplo, as relacionadas com colinearidade) não são afetadas por esta mudança.

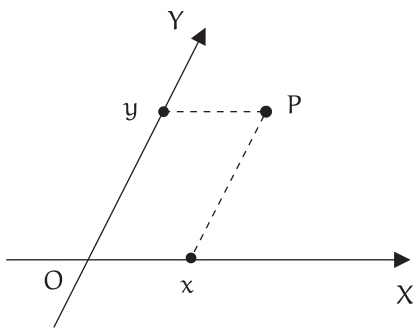


Figura 6.1 - Coordenadas oblíquas.

O uso de um par de eixos (ortogonais ou não), não é a única maneira de se estabelecer correspondências entre pontos do plano e pares orde-

nados de números reais. No sistema de *coordenadas polares* usa-se um único eixo OX.

Dado um par (R, θ) de números reais (com $R > 0$), obtém-se o ponto correspondente P do plano considerando a circunferência de centro O e raio R e sobre ela tomando um arco de θ radianos a partir do ponto de interseção com o semi-eixo positivo OX (no sentido anti-horário, se $\theta > 0$; no sentido horário, se $\theta < 0$).

O ponto assim resultante é facilmente expresso em coordenadas cartesianas relativas ao sistema de eixos ortogonais em que o eixo das abcissas é OX. Se (R, θ) são as coordenadas polares de um ponto P, as coordenadas cartesianas desse mesmo ponto são $(R\cos\theta, R \text{ sen } \theta)$.

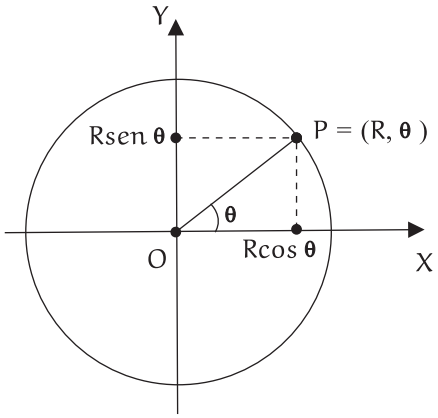


Figura 6.2 - Sistema de coordenadas polares.

Uma desvantagem de utilizar coordenadas polares reside no fato de que a correspondência acima descrita não é biunívoca, já que se um ponto P do plano é dado em coordenadas polares por (R, θ), então todos os pares da forma $(R, \theta + 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$, são associados a P. Além disso, as coordenadas polares da origem O não são definidas. Entretanto, há certas figuras (particularmente aquelas construídas a partir de circunferências) cujo estudo fica facilitado com o uso de coordenadas polares. Por esse motivo, as coordenadas polares são usadas em problemas de Cálculo, especialmente na avaliação de certas integrais duplas.

Exemplo 6.1 Num sistema de coordenadas oblíquas, a equação $y = x$ caracteriza os pontos (x, x) situados sobre a bissetriz do ângulo formado pelos semi-eixos positivos.

Exemplo 6.2 No sistema de coordenadas polares (R, θ), a equação $R = 3$ define uma circunferência de centro na origem e raio 3 enquanto a equação $\theta = \pi/3$ define uma semi-reta (desprovida da origem) que parte de O e forma um ângulo de 60^0 com o semi-eixo positivo OX. Já a equação $R = \theta$ representa uma espiral que parte da origem, gira no sentido positivo e corta o semi-eixo OX nos pontos de coordenadas $2\pi, 4\pi, 6\pi$, etc.

Exercícios

1. Identifique os seguintes subconjuntos do plano por meio de suas coordenadas polares r, θ:
   a) $R = 3$;
   b) $\theta = 3\pi/4$;
   c) $R\cos\theta = 5$.

2. Seja X o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas polares satisfazem a equação $R = \cos\theta$, com $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Mostre que a distância de um ponto qualquer de X ao ponto $P = (0, 1/2)$ é igual a $1/2$ e conclua que X é a circunferência de centro P e raio $1/2$, menos um ponto.

3. Tomando no plano um sistema de eixos oblíquos no qual o ângulo de OX para OY é θ, mostre que a distância do ponto $P = (x, y)$ ao ponto $P' = (x', y')$ é dada por

$$d(P, P') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + 2(x - x')(y - y')\cos\theta}\,.$$

4. Se (x, y) são as coordenadas do ponto P num sistema de eixos ortogonais, quais são as coordenadas polares (R, θ) desse ponto? (Supomos o semi-eixo positivo de OX como a origem do ângulo θ.)

5. Esboce a curva descrita pelo ponto de coordenadas polares $R = t$, $\theta = 2\pi t$ quando t assume todos os valores reais positivos.

6. Descreva o conjunto representado, em coordenadas polares, pela equação $R = 3/\operatorname{sen}\theta$.

7. Esboce o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas polares satisfazem a relação $R = \cos 3\theta$.

8. Num sistema de coordenadas oblíquas em que os semi-eixos positivos formam um ângulo α, prove que a rotação de ângulo α em torno da origem leva o segmento OP, onde $P=(x, y)$, sobre o segmento OP' onde $P'=(-y, x+2y\cdot\cos\alpha)$. (Aqui, estamos supondo que α é o ângulo de rotação do eixo x para o eixo y e que o sentido de rotação de OP para OP' é o mesmo.)

7

As Equações da Reta

Uma vez escolhido um sistema de coordenadas no plano, as curvas nesse plano passam a ser representadas por equações. Chama-se equação de uma curva C a uma igualdade envolvendo as variáveis x, y, a qual é satisfeita se, e somente se, o ponto $P = (x, y)$ pertence à curva C.

Por exemplo, $x = y$ é a equação da bissetriz comum ao primeiro e terceiro quadrantes, isto é, da diagonal Δ, porque o ponto $P = (x, y)$ pertence a Δ se, e somente se, $x = y$. Analogamente, $x = -y$ é a equação da reta Δ', bissetriz comum ao segundo e quarto quadrantes.

Há três tipos principais de equações que definem retas no plano. Trataremos inicialmente da equação $y = ax + b$.

A equação $y = ax + b$

Diz-se que a reta r é *vertical* quando ela é paralela ao eixo OY ou coincide com ele. Analogamente, diz-se que r é *horizontal* quando é paralela ao eixo OX ou é o próprio OX.

Se a reta vertical r corta o eixo OX no ponto de abcissa c então todos os pontos de r são da forma $P = (c, y)$ com $y \in \mathbb{R}$ arbitrário. Diz-se então que a equação da reta r é $x = c$.

Seja agora r uma reta não-vertical. Ela corta o eixo OY no ponto $B = (0, b)$, de ordenada b. O ponto de abcissa 1 da reta r é $A = (1, a+b)$, onde a é a variação que sofre a ordenada de um ponto $P = (x, y)$, que descreve a reta r, quando sua abcissa vai de 0 até 1.

Afirmamos que $y = ax+b$ é a equação da reta r, isto é, que os pontos de r são aqueles da forma $P = (x, ax+b)$. Para prová-lo, consideramos o conjunto $X = \{(x, ax+b) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R}\}$, gráfico da função afim $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

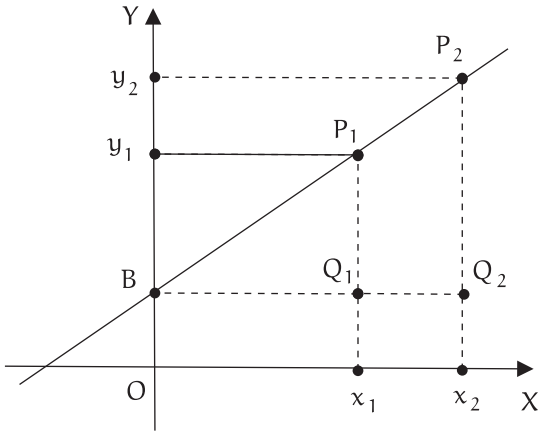


Figura 7.1 - Os triangulos retângulos BQ_1P_1 e $\hat{BQ_2}P$ são semelhantes porque têm o mesmo ângulo agudo $\hat{B}$.

$f(x) = ax + b$. Devemos mostrar que $X = r$. Como X e r têm em comum os pontos A e B, basta constatar que X é uma reta, ou seja, que três pontos quaisquer $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$, pertencentes a X, são colineares. Supomos que a numeração foi escolhida de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. Então verifiquemos que $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3)$. Ora,

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (ax_1 + b - ax_2 - b)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2(1 + a^2)}$$
$$= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

Analogamente se vê que $d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$ e $d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$, logo $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3)$.

Em suma: dada uma reta não-vertical r, existem números reais a e b com a seguinte propriedade: o ponto $P = (x, y)$ pertence a r se, e somente se, vale $y = ax + b$. Dizemos então que a equação

$$y = ax + b$$

representa a reta r, ou que esta é a *equação da reta* r. Muitas vezes diz-se simplemente "a reta $y = ax + b$" para significar "a reta cuja equação é $y = ax + b$".

Convém ter sempre em mente os significados das constantes a e b na equação $y = ax + b$ da reta não-vertical r: b é a ordenada do ponto em que r corta o eixo vertical OY e a, *inclinação* de r, mede a taxa de crescimento de y em função de x. Quando se dá a x o acréscimo 1 (passando de x para $x + 1$), o acréscimo correspondente de y é $[a(x + 1) + b)] - [ax + b] = a$. Mais geralmente, se $y_1 = ax_1 + b$ e $y_2 = ax_2 + b$ com $x_1 \neq x_2$ então

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{ razão do acréscimo de } y \text{ para o acréscimo de } x.$$

Quando $a > 0$ a reta $y = ax + b$ é inclinada para cima e quando $a < 0$ ela é inclinada para baixo.

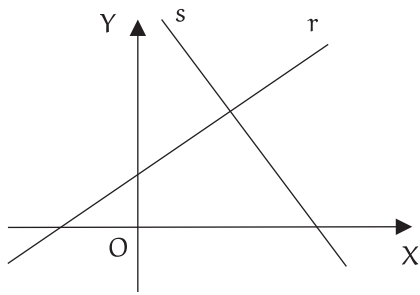


Figura 7.2 - A inclinação da reta r é positiva e a de s é negativa .

Evidentemente, quando $a = 0$, a equação $y = b$ representa uma reta horizontal.

A interseção das retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ é o ponto $P = (x, y)$ cujas coordenadas satisfazem ambas equações, logo são soluções do sistema

$$\begin{aligned} -ax + y &= b \\ -a'x + y &= b'. \end{aligned}$$

As retas dadas são paralelas quando não existe um ponto $P = (x, y)$ comum a ambas, ou seja, quando o sistema acima não possui solução. Ora, este sistema é equivalente a

$$\begin{aligned} -ax + y &= b \\ (a - a')x &= b' - b, \end{aligned}$$

o qual é desprovido de solução se, e somente se, $a = a'$ e $b \neq b'$.

Portanto, *as retas* $y = ax + b$ *e* $y = a'x + b'$ *são paralelas se, e somente se, possuem a mesma inclinação* a *e cortam o eixo* OY *em pontos distintos, de ordenadas* $b \neq b'$.

É claro que o enunciado acima, de natureza geométrica, dispensa maiores considerações para concluir que as relações $a = a'$ e $b \neq b'$ caracterizam o paralelismo das retas dadas. Mas o raciocínio em termos de equações lineares contribui para ilustrar o método analítico de resolver questões de Geometria.

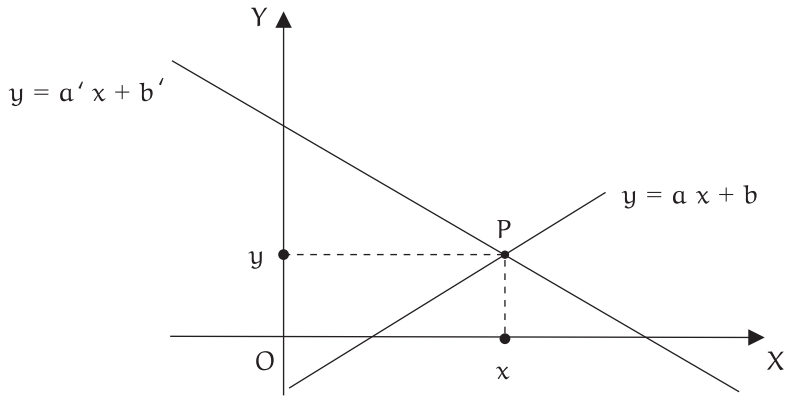


Figura 7.3 - O ponto P = (x,y) é a interseção das retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$.

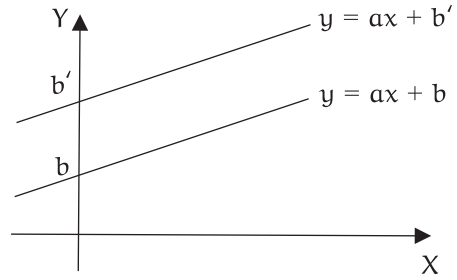


Figura 7.4 - Retas paralelas: mesma inclinação a, mas $b' \neq b$.

Exemplo 7.1 As retas $y = 3x + 1$ e $y = 3x - 5$ são paralelas. As

retas $y = 2x - 5$ e $y = 4x + 7$ têm em comum o ponto $(-6, -17)$ pois $2x - 5 = 4x + 7 \Leftrightarrow 2x = -12 \Leftrightarrow x = -6$ e $y = 2 \cdot (-6) - 5 = -17$.

A equação $y = ax + b$ põe em relevo a ordenada b do ponto em que a reta corta o eixo OY, ou seja, do ponto da reta que tem abcissa zero. Às vezes, porém, a informação que se tem diz respeito a outra abcissa x_1. Neste caso, a equação da reta se escreverá mais rapidamente se não nos preocuparmos em calcular explicitamente o valor de b.

Por exemplo, a equação da reta que tem inclinação a e passa pelo ponto $P = (x_1, y_1)$ é

$$y = y_1 + a(x - x_1).$$

Com efeito, a equação procurada tem a forma $y = ax + b$, onde a é dado mas b não é conhecido. Entretanto sabemos que $y_1 = ax_1 + b$. Subtraindo membro a membro estas duas igualdades, obtemos $y - y_1 = a(x - x_1)$, donde $y = y_1 + a(x - x_1)$.

Esta equação tem um significado intuitivo bastante interessante: partindo do ponto de abcissa x_1 e ordenada y_1, obtemos um ponto (x, y) qualquer da reta somando à ordenada inicial y_1 o acréscimo $a(x - x_1)$, igual ao acréscimo $x - x_1$, dado à abcissa, vezes a taxa de variação a da ordenada como função da abcissa.

Exemplo 7.2 A equação da reta que passa pelo ponto $(3, 5)$ com inclinação -2 é $y = 5 - 2(x - 3) = -2x + 11$.

Do que vimos acima resulta imediatamente a equação da reta que passa pelos dois pontos distintos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$. Se $x_1 = x_2$, a equação procurada é $x = x_1$ (ou $x = x_2$) e a reta é vertical. Supondo $x_1 \neq x_2$, a reta PQ tem inclinação $a = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ logo sua equação é

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ou

$$y = y_2 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2).$$

Pode não parecer, mas os segundos membros destas duas equações são iguais. Na primeira, estamos dizendo que a reta passa pelo ponto (x_1, y_1) com inclinação $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. Na segunda, dizemos que a reta passa pelo ponto (x_2, y_2) com a mesma inclinação.

Exemplo 7.3 A reta que passa pelos pontos $(-1, 3)$ e $(2, 5)$ tem inclinação $\frac{5-3}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$, logo sua equação é $y = 3 + \frac{2}{3}(x - (-1)) = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$.

Poderíamos também pensar nesta reta como passando pelo ponto $(2,5)$, com a mesma inclinação $\frac{2}{3}$, naturalmente. Então obteríamos sua equação assim:

$$y = 5 + \frac{2}{3}(x-2) = \frac{2}{3}x + 5 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}.$$

Exemplo 7.4 Para verificar se três pontos dados A, B e C são colineares ou não, basta examinar se as retas AB e AC têm a mesma inclinação. Por exemplo, se $A = (2,3)$, $B = (3,5)$ e $C = (4,6)$ então a inclinação de AB é $\frac{5-3}{3-2} = 2$ enquanto que a inclinação de AC é $\frac{6-3}{4-2} = \frac{3}{2}$, logo A, B e C não estão sobre a mesma reta. Se tomarmos o ponto $D = (4,7)$, a inclinação da reta AD será $\frac{7-3}{4-2} = 2$, logo A, B e D são colineares.

Tomando $O = (0,0)$, $A = (a,b)$ e $C = (c,d)$ com $a \neq 0$ e $c \neq 0$, a inclinação de OA é b/a e a de OC é d/c, logo os pontos O, A e C são colineares se, e somente se, $b/a = d/c$ ou, equivalentemente, $ad - bc = 0$.

A condição $ad - bc = 0$ é mais conveniente para exprimir a colinearidade dos pontos O, A e C do que a igualdade $b/a = d/c$ porque nos livra da preocupação de denominadores iguais a zero.

Vejamos agora em que condições as retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ são perpendiculares. Isto equivale a perguntar quando as retas $y = ax$ e $y = a'x$, que passam pela origem O, são perpendiculares, pois estas são paralelas às primeiras. Tomando os pontos $P = (1,a)$ e $Q = (1,a')$ sobre estas retas, a questão se resume a saber se os segmentos OP e OQ são perpendiculares. Como vimos na Seção 2, isto ocorre se, e somente se, $1 + aa' = 0$.

Portanto as retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ são perpendiculares se, e somente se, $a' = -1/a$.

Esta condição supõe, evidentemente, que a e a' são diferentes de zero. Mas é claro que se uma das retas dada for horizontal suas perpendiculares serão verticais e o problema desaparece.

Exemplo 7.5 Dados os pontos $A = (2,5)$, $B = (3,2)$ e $C = (-1,3)$, achar as equações das retas r, paralela a AB passando por C, e s, perpendicular a AB também passando por C.

A inclinação da reta AB é $\frac{2-5}{3-2} = -3$. Logo a inclinação de r é -3 e a de s é $1/3$. Assim, as equações procuradas são:

$$y = 3 - 3(x - (-1)) = -3x \quad \text{(equação de } r\text{)} \quad \text{e}$$

$$y = 3 + \frac{1}{3}(x - (-1)) = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \quad \text{(equação de } s\text{)}.$$

A equação $ax + by = c$

Sempre que escrevermos a equação $ax + by = c$, estaremos supondo que a e b não são simultaneamente nulos, ou seja, que $a^2 + b^2 \neq 0$, mesmo que isto não seja dito explicitamente.

Quando se afirma que a equação $ax + by = c$ representa a reta r, isto significa que um ponto $P = (x, y)$ pertence a r se, e somente se, suas coordenadas x, y satisfazem a equação dada.

Por exemplo, a equação $x - y = 0$ representa a bissetriz do primeiro quadrante. Aqui, $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$.

Mostraremos agora que, dada uma reta r qualquer no plano, existem números a, b, c tais que a equação $ax + by = c$ representa a reta r.

Para ver isto, tomamos um ponto $A = (a, b)$ diferente de O, sobre a reta OA, perpendicular à reta dada r, baixada da origem O.

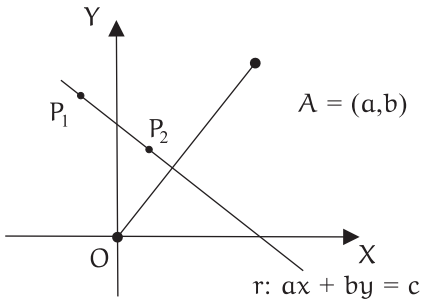


Figura 7.5 - OA é perpendicular à reta r.

Se $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ são dois pontos quaisquer sobre r, o segmento P_1P_2 é perpendicular a OA, portanto

$$a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$$

ou seja:

$$ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2.$$

Esta última igualdade nos diz que, seja qual for o ponto $P = (x, y)$ pertencente à reta r, a expressão $ax + by$ tem sempre o mesmo valor. Chamando este valor de c, acabamos de mostrar que se o ponto $P = (x, y)$ pertence à reta r então suas coordenadas satisfazem a equação

$$ax + by = c.$$

Reciprocamente, suponhamos que as coordenadas de $P = (x, y)$ satisfaçam esta equação. Escolhamos arbitrariamente um ponto $Q = (x_0, y_0)$ na reta r. Como Q está em r, vale

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Subtraindo estas duas últimas equações, vem

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Isto quer dizer que o segmento PQ é perpendicular à reta OA, ou seja, que o ponto P pertence à perpendicular baixada de Q sobre OA. Mas esta perpendicular é a reta r. Assim, P pertence a r.

Conclusão: o ponto $P = (x, y)$ pertence à reta r, se, e somente se, suas coordenadas satisfazem à equação $ax + by = c$.

A reta representada pela equação $ax + by = c$ é horizontal se, e somente se, $a = 0$. Ela é vertical se, e somente se, $b = 0$. Com efeito, estas condições significam respectivamente que y é constante e que x é constante ao longo da reta.

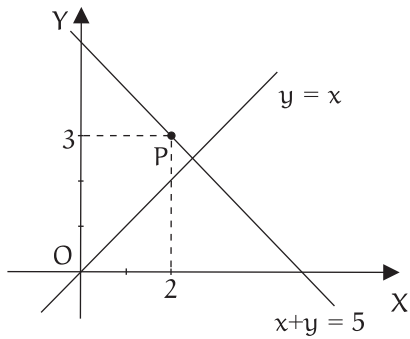


Figura 7.6 - A reta $x + y = 5$ passa por $P = (2,3)$ e é perpendicular à reta $y = x$.

Exemplo 7.6 Achar a equação da reta que passa pelo ponto $P = (2, 3)$ e é perpendicular à bissetriz do primeiro quadrante.

Tomando o ponto $A = (1, 1)$ sobre a bissetriz, a equação procurada tem a forma $x + y = c$. Como o ponto $P = (2, 3)$ está sobre a reta dada,

temos $2+3=c$, ou seja, $c=5$. Logo a equação $x+y=5$ representa a reta em questão. Se tivéssemos escolhido outro ponto, digamos $A'=(6,6)$ sobre a bissetriz, teríamos obtido a equação $6x+6y=c$, com $c=2\cdot 6+3\cdot 6=30$, o que nos daria $6x+6y=30$.

Isto ilustra o fato de que se a equação $ax+by=c$ representa a reta r então qualquer que seja $k\neq 0$, a equação $(ka)x+(kb)y=kc$ também representa a mesma reta pois é claro que estas duas equações são equivalentes, isto é, um par (x,y) satisfaz uma delas se, e somente se, satisfaz a outra.

Exemplo 7.7 Obter a equação da reta que passa pelos pontos $P=(1,3)$ e $Q=(2,-1)$.

A equação procurada é da forma $ax+by=c$ onde, pondo $A=(a,b)$, os segmentos OA e PQ são perpendiculares, portanto

$$(2-1)\cdot a+(-1-3)\cdot b=0$$

isto é $a-4b=0$, logo $a=4b$. Tomando $b=1$, obtemos $a=4$ e a equação que procuramos é $4x+y=c$.

Como a reta passa pelo ponto $P=(1,3)$, devemos ter $4\cdot 1+3=c$, ou seja, $c=7$. Assim, a equação $4x+y=7$ representa a reta que passa pelos pontos $P=(1,3)$ e $Q=(2,-1)$.

Ao resolver o problema acima, poderíamos ter atribuido a b qualquer valor (exceto zero, pois a reta dada não é vertical). Tomando $b=k$ teríamos $a=4k$, $c=4\cdot k+3k=7k$ e a equação teria a forma $4kx+ky=7k$, que é equivalente a $4x+y=7$, quando $k\neq 0$.

Mostraremos agora que multiplicar os coeficientes a,b,c pelo mesmo número $k\neq 0$ é a única alteração que se pode fazer na equação $ax+by=c$ de modo que ela continue a representar a mesma reta.

Sejam r e r' as retas representadas pelas equações $ax+by=c$ e $a'x+b'y=c'$ respectivamente. Ponhamos $A=(a,b)$ e $A'=(a',b')$. Vale o

Teorema 1 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *As retas r e r' são paralelas ou coincidem;*
(2) *Os pontos O,A e A' são colineares;*
(3) $ab'-ba'=0$*;*
(4) *Existe $k\neq 0$ tal que $a'=k\cdot a$ e $b'=k\cdot b$.*

Demonstração: Provaremos que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) .

Como r é perpendicular a OA e r' é perpendicular a OA', se r e r' são paralelas ou coincidem, os segmentos OA e OA' estão sobre a mesma reta, logo O, A e A' são colineares. Assim, (1) $\Rightarrow$ (2).

Se O, A e A' são colineares então, como vimos após o exemplo 7.4 acima, tem-se $ab' - ba' = 0$. Logo (2) $\Rightarrow$ (3).

Suponhamos $ab' - ba' = 0$. Sabemos que um dos números a, b é diferente de zero. Seja $a \neq 0$. Então, de $ab' = ba'$ resulta $b' = \frac{a'}{a} \cdot b$. Pondo $k = a'/a$, temos $b' = k \cdot b$ e (obviamente) $a' = k \cdot a$. O número k não pode ser zero pois isto faria $a' = b' = 0$, contrariando a convenção de que, na equação $a'x + b'y = 0$, os coeficientes a' e b' não se anulam simultaneamente. Assim, (3) $\Rightarrow$ (4).

Finalmente, supondo $a' = ka$ e $b' = k \cdot b$, há duas possibilidades: ou $c' = k \cdot c$ (com o mesmo k!) ou $c' \neq k \cdot c$. No primeiro caso, se tomarmos um ponto qualquer (x, y) na reta r, teremos $ax + by = c$, logo $kax + kay = kc$, ou seja, $a'x + b'y = c'$, portanto (x, y) pertence a r'. Então todo ponto de r está em r', isto é, a reta r está contida na reta r'. Assim, $r = r'$. No segundo caso, em que $c' \neq kc$, para todo ponto (x, y) em r, temos $ax + by = c$, logo $kax + kby = kc$, ou seja, $a'x + b'y = kc \neq c'$ portanto (x, y) não pertence a r'. Noutras palavras: nenhum ponto de r pertence a r'. Então r e r' são paralelas. □

Corolário 7.1 *As equações* $ax + by = c$ *e* $a'x + b'y = c'$ *representam a mesma reta se, e somente se, existe* $k \neq 0$ *tal que* $a' = ka$, $b' = kb$ *e* $c' = kc$.

Tendo interpretado os casos de retas coincidentes ou paralelas em termos dos coeficientes de suas equações, resta-nos o caso de retas concorrentes. Resulta então da discusão acima que as retas definidas pelas equações $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ têm um único ponto em comum se, e somente se, não existe $k \neq 0$ tal que $a' = ka$ e $b' = kb$.

Ainda podemos dizer que as retas $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ são concorrentes se, e somente se, $ab' - ba' \neq 0$.

Esta análise da posição relativa de duas retas com base nos coeficientes das equações que as definem equivale ao estudo das soluções do sistema linear

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c'. \end{aligned}$$

Podemos então dizer que este sistema possui uma única solução (a abcissa x e a ordenada y do ponto de interseção das duas retas)

se, e somente se, $ab' - ba' \neq 0$, é indeterminado se, e somente se, para algum $k \neq 0$ tem-se $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$ e é impossível se, e somente se, $a' = ka$, $b' = kb$ mas $c' \neq kc$ para algum $k \neq 0$.

Mantendo a e b fixos e fazendo variar c, as diversas retas $ax+by = c$ assim obtidas são paralelas entre si, todas perpendiculares ao segmento OA, com $A = (a, b)$. Quando $c = 0$, a reta $ax + by = 0$ passa pela origem.

Evidentemente, uma outra reta $a'x + b'y = c'$, com $A' = (a', b')$ será perpendicular à primeira se, e somente se, $OA \perp OA'$, isto é, $aa' + bb' = 0$.

Portanto, $aa' + bb' = 0$ *é condição necessária e suficiente para que as retas* $ax + by = c$ *e* $a'x + b'y = c'$ *sejam perpendiculares*.

Por exemplo, as retas $ax+by = c$ e $bx-ay = c'$ são perpendiculares, sejam quais forem a, b, c, c'.

Considerando a função linear de duas variáveis $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x, y) = ax + by$, diremos que o ponto $P = (x, y)$ está no *nível* c (ou tem nível c) em relação a φ quando $\varphi(x, y) = c$. Portanto os pontos do plano que estão no nível c em relação à função φ são os pontos da reta representada pela equação $ax + by = c$. Diz-se então que esta reta é a *linha de nível* c da função φ.

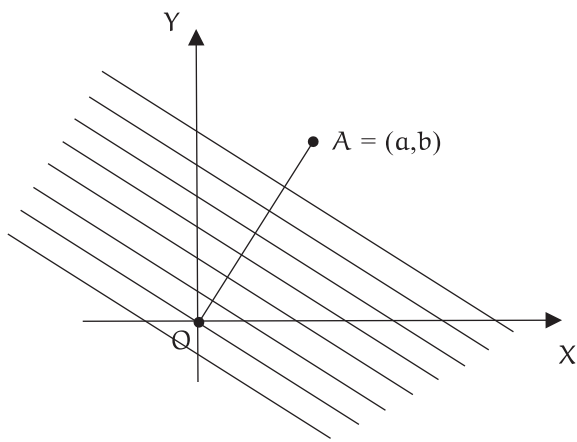


Figura 7.7 - Linhas de nível da função $\varphi(x,y) = ax + by$.

A linha de nível 0 é a reta $ax + by = 0$. As demais linhas de nível da função φ são as retas paralelas a esta, todas elas perpendiculares ao

segmento OA, onde $A = (a, b)$.

Observação 7.1 Às vezes é conveniente saber localizar, de modo prático, a posição da reta dada pela equação $ax + by = c$. Se $a = 0$, tem-se a reta horizontal $y = c/b$. Se $b = 0$, a reta vertical $x = c/a$. Suponhamos então $ab \neq 0$. A primeira coisa a lembrar é que r é perpendicualr ao segmento OA, onde $A = (a, b)$. Se for necessária uma informação mais precisa, um modo eficiente de traçar a reta é marcar os pontos em que ela intersecta os eixos. Fazendo $x = 0$, vem $by = c$, donde $y = c/b$, logo r corta o eixo OY no ponto $(0, c/b)$. Analogamente, pondo $y = 0$, vem $ax = c$, donde $x = c/a$, portanto a reta r corta o eixo OX no ponto $(c/a, 0)$. Por exemplo, a reta cuja equação é $3x+5y = 1$ é perpendicular ao segmento OA, com $A = (3, 5)$. Ela corta os eixos coordenados nos pontos $P = (0, 1/5)$ e $Q = (1/3, 0)$. Ligando estes pontos, traçamos a reta.

Equações paramétricas.

Dados os pontos distintos $A = (a, b)$ e $C = (c, d)$, as equações

$$\begin{aligned} x &= (1-t)a + tc \\ y &= (1-t)b + td, \end{aligned} \quad \text{ou}$$

$$\begin{aligned} x &= a + t(c-a) \\ y &= b + t(d-b), \end{aligned}$$

onde t assume todos os valores reais, chamam-se as *equações paramétricas* da reta AC. Elas descrevem a trajetória do ponto (x, y), em função do parâmetro t, que pode ser pensado como o tempo. Para $t = 0$ temos $(x, y) = (a, b)$. Para $t = 1$, vale $(x, y) = (c, d)$. Se $a = c$ então $x \equiv a$ é constante e AC é vertical. Suponhamos $a \neq c$. Então, para todos os valores de t, temos $t = (x - a)/(c - a)$, logo

$$y = b + \frac{d-b}{c-a}(x - a).$$

Portanto quando t assume todos os valores reais, o ponto (x, y) descreve realmente a reta que passa pelos pontos A e C.

Exemplo 7.8 Como exemplo do uso das equações paramétricas, consideremos o seguinte problema: dados $A = (0, 1)$ e $B = (m, 0)$, determinar os pontos $P = (x, y)$ da reta AB situados à distância 1 da origem.

Os pontos procurados são o próprio A e a interseção P da reta AB com a circunferência de centro O e raio 1. Vamos achar as coordenadas de P.

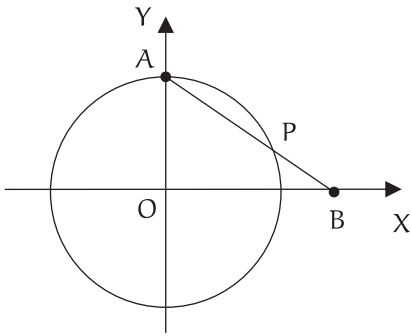


Figura 7.8 - Situação do Exemplo 7.8.

As equações paramétricas da reta AB são:

$$x = tm$$
$$y = 1 - t$$

Devemos determinar t de modo que se tenha $x^2 + y^2 = 1$, ou seja, $t^2m^2 + (1-t)^2 = 1$. Esta equação significa

$$(1 + m^2)t^2 - 2t = 0,$$

logo os valores de t procurados são $t = 0$ e $t = \frac{2}{1+m^2}$. No primeiro caso, obtemos o ponto $(x, y) = (0, 1) = A$, o que era obviamente esperado. O segundo valor de t nos dá

$$x = \frac{2m}{1+m^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{m^2-1}{m^2+1}.$$

portanto o ponto

$$P = \left(\frac{2m}{1+m^2}, \frac{m^2-1}{m^2+1}\right)$$

é o único outro ponto além de A que está sobre a reta AB e sua distância à origem O é igual a 1.

Consideremos agora o problema inverso: dado o ponto $P = (x, y) \neq A$ na circunferência de centro O e raio 1, determinar a abcissa m do ponto $B = (m, 0)$ onde a reta AP corta o eixo horizontal.

Sabemos que $x = tm$ e $y = 1 - t$. Daí tiramos sucessivamente $t = \frac{x}{m}$, $y = 1 - \frac{x}{m}$ e $m = \frac{x}{1-y}$. O ponto procurado é $B = \left(\frac{x}{1-y}, 0\right)$.

O argumento acima mostra que as fórmulas

$$x = \frac{2m}{1+m^2}, \quad y = \frac{m^2-1}{m^2+1} \quad \text{e} \quad m = \frac{x}{1-y}, \qquad \text{com } x^2 + y^2 = 1,$$

estabelecem uma correspondência biunívoca entre os pontos $B = (m, 0)$ do eixo horizontal e os pontos $P = (x, y)$ da circunferência de centro O e raio 1, com exceção do "pólo norte" $A = (0, 1)$.

Assim, fazendo m variar entre todos os números reais, o ponto

$$P = \left(\frac{2m}{1+m^2}, \frac{m^2-1}{m^2+1}\right)$$

descreve aquela circunferência menos o ponto $A = (0, 1)$. É interessante observar que se a abcissa m é um número racional então as coordenadas de P são racionais.

Exercícios

1. Qual é a equação da paralela à reta $y = -2x+5$ passando pelo ponto $P = (1, 1)$?

2. Ache a equação da perpendicular à reta $y = 3x-1$ baixada do ponto $Q = (2, 2)$.

3. Sejam $A(1, 2)$ e $B = (-3, -4)$. Qual é o ponto de abcissa 5 sobre a reta perpendicular a AB passando pelo ponto $C = (5, 6)$?

4. Seja $A = (3, 1)$. Ache B tal que o triângulo OAB seja equilátero.

5. Mostre que, para todos os valores reais de a, as retas $y = ax + 3 - 5a$ passam pelo mesmo ponto. Que ponto é esse?

6. As retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ são perpendiculares e contêm o ponto (x_0, y_0). Conhecendo a e b, determine a' e b'.

7. Ache um ponto P sobre a reta $y = 2x$ e um ponto Q sobre a reta $y = 3x$, ambos diferentes da origem O, tais que $d(O, P) = d(O, Q)$. Em seguida determine as coordenadas do ponto médio do segmento PQ e, a partir daí, obtenha a equação da bissetriz de um dos ângulos formados pelas retas dadas.

8. Os lados de um triângulo estão sobre as retas $y = 2x+1$, $y = 3x-2$ e $y = 1-x$. Ache os vértices desse triângulo.

9. Os pontos $A = (2,5)$ e $A' = (14,1)$ são simétricos em relação a uma reta. Determine a equação dessa reta.

10. Sejam $A = (1,2)$, $B = (2,4)$ e $C = (3,-1)$. Ache as equações da mediana e da altura do triângulo ABC que partem do vértice A.

11. Tome, sobre as retas AB e AC do exercício anterior, pontos P e Q tais que $d(A,P) = d(A,Q)$. Ache o ponto médio M do segmento PQ e obtenha a equação da reta AM, bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$.

12. Ache os pontos da reta $y = 2x + 1$ que estão situados à distância 2 da origem.

13. Sejam p e q tais que $pq \neq 0$. Escreva, sob a forma $ax + by = 1$, a equação da reta que corta os eixos OX e OY nos pontos $P = (p,0)$ e $Q = (0,q)$ respectivamente.

14. Sejam $A = (a,0)$ e $B = (0,b)$, com $ab \neq 0$. Escreva, sob a forma $\alpha x + \beta y = c$, a equação da reta que contém a altura do triângulo retângulo OAB, baixada do vértice do ângulo reto sobre a hipotenusa.

15. Mostre que, para quaisquer valores de s e t, as retas $(2s+3t)x + (3s-2t)y = 5s+4t$ passam pelo mesmo ponto. Mostre também que toda reta que passa por esse ponto é representada por uma equação da forma acima, para uma escolha conveniente de s e t.

16. Seja $ax+by = c$ e $a'x+b'y = c'$ retas que têm um ponto P em comum. Prove que a reta $a''x + b''y = c''$ passa por este mesmo ponto P se, e somente se, existem números s, t tais que $a'' = sa + ta'$, $b'' = sb + tb'$ e $c'' = sc + tc'$.

17. Sob a forma $ax + by = c$, escreva a equação da reta perpendicular à reta $3x + 2y = 5$ baixada do ponto $P = (-1,-2)$.

18. Qual é o ponto de ordenada 3 na reta paralela a $3x - 2y = 2$ tirada pelo ponto $A = (5,-1)$?

19. Dê exemplo de uma função linear $\varphi(x,y) = ax + by$, com $ab \neq 0$, tal que, para $c < c'$, a distância entre as linhas de níveis c e c' de φ seja $c' - c$.

20. Quais são as paralelas situadas à distância 5 da reta $3x - 4y = 1$?

21. Na reta $ax + by = c$ tem-se $c > 0$. Quais devem ser os sinais de a e b para que essa reta não contenha pontos do segundo quadrante?

22. Qual é a distância entre as retas paralelas $x - 3y = 4$ e $2x - 6y = 1$?

23. Prove que toda reta do plano pode ser representada por uma equação da forma $ax + by = c$, com $a^2 + b^2 = 1$. Represente assim a reta que corta os eixos OX e OY nos pontos $(p,0)$ e $(0,q)$ respectivamente.

24. Qual é o ponto de interseção da reta $ax + by = c$ com a reta OA, onde $A = (a,b)$?

25. Em que pontos a reta $ax + by = c$ corta os eixos OX e OY?

26. Supondo $b \neq 0$, exiba pontos com abcissas $2, 3$ e 4 sobre a reta $ax + by = c$.

27. Obtenha equações paramétricas para a reta que passa pelo ponto $(2,3)$ e é perpendicular à reta $5x - 3y = 2$.

28. Determine a e b de modo que as equações $x = at + 1$, $y = bt + 5$ sejam uma representação paramétrica da reta $y = 2x + 3$.

29. Dado o ponto (x_0, y_0) sobre a reta $y = ax + b$, determine α e β de modo que as equações $x = \alpha t + x_0$, $y = \beta t + y_0$ sejam uma representação paramétrica da reta $y = ax + b$.

30. Escreva uma representação paramétrica da reta $3x + 4y = 5$ sob a forma $x = at - 5$, $y = bt + 5$.

31. Escreva uma representação paramétrica da reta que passa pelos pontos $(7, -2)$ e $(3, 4)$.

32. A reta r é representada parametricamente por $x = at+b$, $y = ct+d$. Determine o ponto $P = (x, y)$ em que r intersecta a seta s, cuja equação é $\alpha x + \beta y = c$.

33. Ache uma representação paramétrica para a reta $5x - 2y = 1$.

34. São dados os pontos $A = (5, 7)$, $B = (6, 9)$ e $C = (6, 0)$. (a) Escreva a equação da reta BC. (b) Escreva a equação da reta r, que passa pelo ponto A e é perpendicular à reta BC. (c) Ache as coordenadas do ponto D, interseção das retas r e BC. (d) No triângulo ABC, determine a medida da altura AD, que parte do vértice A.

35. Escreva, sob a forma $ax + by = c$, a equação da reta que passa pelo ponto $P = (x_0, y_0)$ e é perpendicular ao segmento OQ, com $Q = (m, n)$.

36. Sejam a, b constantes não-nulas. A cada ponto $P = (x, y)$ façamos corresponder o ponto $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y})$, com $\overline{x} = x/a$ e $\overline{y} = y/b$. Mostre que quando P descreve uma reta r, seu correspondente $\overline{P}$ também descreve uma reta $\overline{r}$. Se a equação de $\overline{r}$ é $m\overline{x} + n\overline{y} = p$, qual é a equação de r?

37. Prove que um sistema de coordenadas oblíquas a equação de uma reta ainda tem a forma $y = ax + b$, onde b é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo y e $a = \operatorname{sen}\beta / \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$, onde α é o ângulo entre os eixos e β é o ângulo que o eixo x faz com a reta dada.

8

Ângulo entre Duas Retas

Duas retas r e r' que concorrem num ponto formam quatro ângulos. Dois quaisquer desses ângulos, ou são opostos pelo vértice, logo congruentes, ou são adjacentes com os lados exteriores em linha reta, logo suplementares. Assim, seus cossenos coincidem ou diferem apenas pelo sinal. Segue-se que, se α é qualquer um dos quatro ângulos formados por duas retas que se cortam num ponto, o valor absoluto $|\cos\alpha|$ está definido sem ambigüidade.

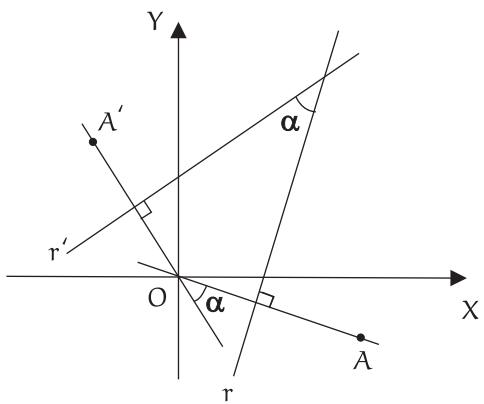


Figura 8.1 - Um dos ângulos formados por r e r' (a saber: o ângulo α) é igual a um dos ângulos entre OA e OA'.

Se as duas retas são representadas pelas equações $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ então elas são perpendiculares respectivamente às retas

OA e OA', onde $O = (0,0)$, $A = (a,b)$ e $A' = (a',b')$. Portanto os quatro ângulos formados pelas retas dadas são congruentes àqueles formados pelas retas OA e OA'. Assim, se α é um desses ângulos, podemos afirmar (vide Seção 4) que

$$|\cos\alpha| = \frac{|aa' + bb'|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{(a')^2+(b')^2}}.$$

Novamente vemos que as retas $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ são perpendiculares se, e somente se, $aa'+bb' = 0$. Observe ainda que se as retas são paralelas ou coincidentes, a expressão acima fornece $|\cos\alpha| = 1$. Note também que a fórmula acima não contém c, o que é natural pois variando c obtêm-se retas paralelas.

Exemplo 8.1 Quais os ângulos formados pelas retas cujas equações são $2x + 3y = 5$ e $5x + y = -3$?

Aplicando a fórmula acima, obtemos

$$|\cos\alpha| = \frac{2\cdot 5 + 3\cdot 1}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{5^2+1^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}} = \frac{13}{13\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto as retas dadas se cortam formando dois ângulos de 45^0 e dois ângulos de 135^0.

Exercícios

1. Seja α um dos ângulos formados pelas retas $ax + by = c$ e $y = px + q$. Dê uma expressão para $|\cos\alpha|$.
2. A reta definida pelas equações paramétricas $x = 2t + 7$, $y = 3t + 8$ forma um ângulo agudo α com reta $5x + 11y = 6$. Determine α.
3. Escreva, sob a forma $ax + by = c$, a equação da reta que passa pela origem e faz um ângulo de 45^0 com a reta $\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} = 1$.
4. Que ângulos faz a reta $3x + 4y = 7$ com os eixos OX e OY?
5. Seja α o ângulo entre o eixo OX e a reta $ax + by = c$. Determine $|\cos\alpha|$.
6. Prove que não existe um triângulo equilátero cujos vértices tenham coordenadas racionais.

9

Distância de um Ponto a uma Reta

Determinemos primeiramente a distância entre as retas paralelas $ax + by = c$ e $ax + by = c'$. Ambas são perpendiculares à reta $bx - ay = 0$, que passa pela origem e as corta nos pontos P e Q respectivamente. As coordenadas desses pontos são obtidas resolvendo os sistemas

$$\begin{matrix} ax + by = c \\ bx - ay = 0 \end{matrix} \quad \text{e} \quad \begin{matrix} ax + by = c' \\ bx - ay = 0. \end{matrix}$$

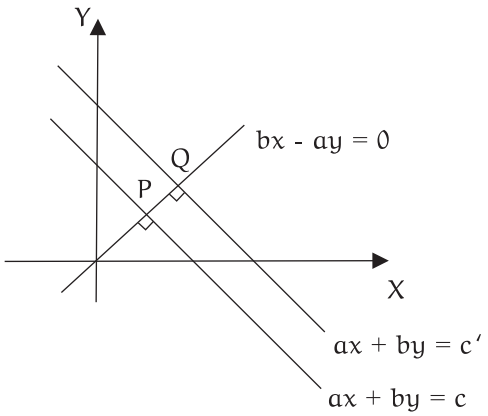


Figura 9.1 - Retas paralelas e sua perpendicular comum.

Facilmente obtemos

$$P = \left(\frac{ac}{a^2+b^2}, \frac{bc}{a^2+b^2}\right) \quad \text{e} \quad Q = \left(\frac{ac'}{a^2+b^2}, \frac{bc'}{a^2+b^2}\right).$$

A distância entre as duas retas dadas é a distância entre os pontos P e Q. Outro cálculo fácil nos dá

$$d(P,Q) = \frac{|c'-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Para calcular a distância do ponto $P = (x_0, y_0)$ à reta r, dada por $ax + by = c$, observamos que a reta paralela a r passando por P tem a equação $ax + by = c'$, onde $c' = ax_0 + by_0$, e que a distância de P a r é igual à distância entre essas duas retas paralelas.

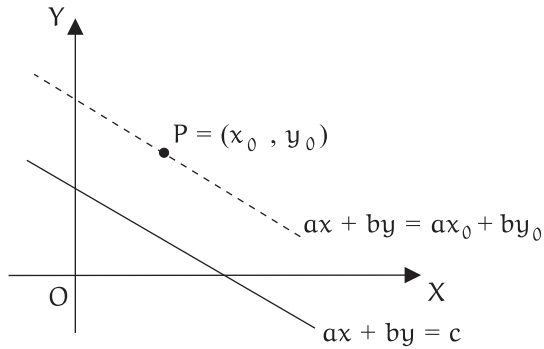


Figura 9.2 - Calculando a distância de um ponto a uma reta.

Pelo que acabamos de ver, tem-se então a expressão

$$d(P,r) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

para a distância do ponto $P = (x_0, y_0)$ à reta $ax + by = c$.

Exemplo 9.1 O ponto P pertence a um dos lados do retângulo $ABCD$. Provar que a soma das distâncias de P às diagonais desse retângulo é constante.

Suponhamos que P pertença ao lado AD. Tomamos um sistema de coordenadas onde $A = (0,0), B = (0,b)$, com $b > 0, C = (a,b)$, com $a > 0$, $D = (a,0)$ e $P = (c,0)$ com $0 \leq c \leq a$.

A equação da diagonal AC é $bx - ay = 0$ e a equação da diagonal BD é $bx + ay = ab$. Somando as distâncias de P a cada uma dessas retas obtemos

$$\frac{|bc - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \text{constante.}$$

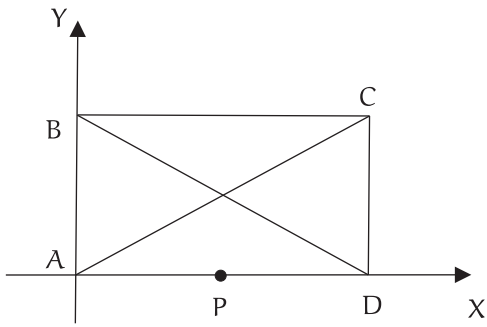


Figura 9.3 - d(P,AC) + d(P,BD) não depende de P .

Observe ainda que essa constante nada mais é do que a distância do ponto A à reta BD.

Exercícios

1. Qual é a distância da origem à reta $5x - 2y = 8$?
2. Qual é o raio da circunferência que tem centro no ponto $P = (4,1)$ e é tangente à reta $3x + 7y = 2$?
3. Os vértices do triângulo ABC são $A = (2,1), B = (1,4)$ e $C = (5,5)$. Qual o comprimento da altura baixada de A sobre a base BC?
4. Determine a distância Δ do ponto $P = (3,1)$ à reta $x + 2y = 3$. Ache o ponto $Q = (x,y)$ sobre esta reta, tal que $d(P,Q) = \Delta$.
5. Obtenha a distância do ponto $P = (-2,3)$ à reta cujas equações paramétricas são $x = 2 - 3t, y = 1 - 4t$.

6. Dadas as retas $r : ax + by = c$ e $r' : a'x + b'y = c'$, suponha que $a^2 + b^2 = (a')^2 + (b')^2 = 1$. Mostre que as duas bissetrizes dos ângulos formados por r e r' são

$$(a - a')x + (b - b')y = c - c' \quad \text{e} \quad (a + a')x + (b + b')y = c + c'.$$

[Lembre que todo ponto da bissetriz, é eqüidistante dos lados.]

10

Área de um Triângulo

Consideremos inicialmente um triângulo A_1, A_2, A_3 do qual o vértice $A_3 = (0,0)$ é a origem. Sejam $A_1 = (a_1, b_1)$ e $A_2 = (a_2, b_2)$. A numeração dos vértices foi feita de modo que o lado A_1A_3 não é vertical, isto é, $a_1 \neq 0$.

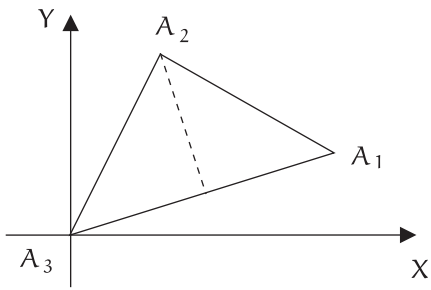


Figura 10.1 - A altura é a distância do vértice à base.

Seja A_1A_3 a base do triângulo. Assim, a distância de A_2 até a reta A_1A_3 é a sua altura. Como a equação da reta A_1A_3 é $b_1x - a_1y = 0$ temos:

$$\text{área de } A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \frac{|b_1a_2 - a_1b_2|}{\sqrt{b_1^2 + (-a_1)^2}} = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|.$$

No caso geral, temos um triângulo $A_1A_2A_3$ onde os vértices $A_1 =$

$(a_1, b_1), A_2 = (a_2, b_2)$ e $A_3 = (a_3, b_3)$ são pontos quaisquer. A partir da origem O, traçamos os segmentos OP e OQ, respectivamente equipolentes a A_3A_1 e A_3A_2, logo $P = (\alpha_1, \beta_1)$ e $Q = (\alpha_2, \beta_2)$, com $\alpha_1 = a_1 - a_3, \beta_1 = b_1 - b_3, \alpha_2 = a_2 - a_3, \beta_2 = b_2 - b_3$.

Então

$$\text{área de } A_1A_2A_3 = \text{área de } OPQ = \frac{1}{2}|\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|,$$

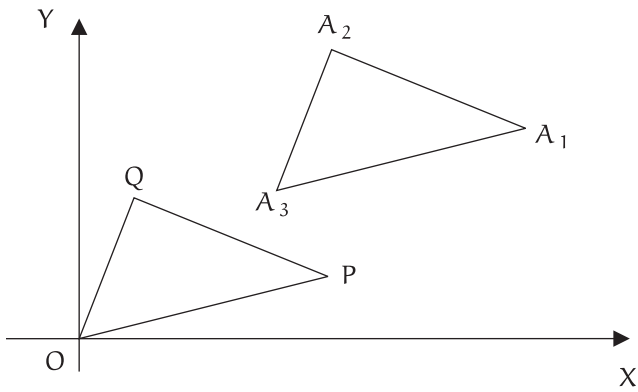


Figura 10.2 - Uma translação leva o triângulo $A_1\ A_2\ A_3$ para a posição PQO.

ou seja:

$$\text{área de } A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}|(a_1 - a_3)(b_2 - b_3) - (a_2 - a_3)(b_1 - b_3)|.$$

Exemplo 10.1 Dados os pontos $A_1 = (1, -4), A_2 = (3, 1)$ e $A_3 = (2, 5)$, existe um único ponto B tal que $A_1A_2A_3B$ é um paralelogramo. Que ponto é esse e qual é a área do paralelogramo $A_1A_2A_3B$?

Se transladarmos o segmento A_1A_2 de modo a fazer A_2 coincidir com A_3 (o que significa somar $2 - 3 = -1$ a cada abcissa e $5 - 1 = 4$ a cada ordenada) o ponto A_1 cairá sobre B, logo $B = (0, 0)$. A área do paralelogramo $A_1A_2A_3B$ é duas vezes a área do triângulo $A_1A_2A_3$, logo é igual a $|(1-2)(1-5) - (3-2)(-4-5)| = |4+9| = 13$. (O leitor deve esboçar a figura.)

Antes de calcular a área de um triângulo, convém transladá-lo de modo que um dos vértices caia sobre a origem. A fórmula fica mais

simples. Por exemplo, se $A = (3,1), B = (4,2)$ e $C = (5,5)$ o triângulo ABC tem a mesma área que $A'B'C'$, onde $A' = (0,0), B' = (1,1)$ e $C' = (2,4)$. O triângulo $A'B'C'$ foi obtido de ABC pela translação $(x,y) \mapsto (x-3, y-1)$, que leva A na origem. Portanto

$$\text{área de } ABC = \text{área } A'B'C' = \frac{1}{2}|1 \cdot 4 - 1 \cdot 2| = \frac{2}{2} = 1.$$

Tradicionalmente se escreve $a_1b_2 - a_2b_1$ como determinante:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Podemos estender esta notação, escrevendo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 - a_2b_1 - a_3b_2 - a_1b_3.$$

Assim, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ é, em valor absoluto, o dobro da área do triângulo $A_1A_2A_3$, onde $A_1 = (a_1, b_1), A_2 = (a_2, b_2)$ e $A_3 = (a_3, b_3)$. Lembrando esta notação, não é preciso transladar o triângulo.

Exercícios

1. Seja Q um quadrilátero cujos vértices são $A_1 = (a_1, b_1), A_2 = (a_2, b_2), A_3 = (a_3, b_3)$ e $A_4 = (a_4, b_4)$. Estendendo a notação introduzida no final da Seção 10, escreva

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_4 + a_4b_1 \\ -a_2b_1 - a_3b_2 - a_4b_3 - a_1b_4 \end{array}$$

e mostre que este número é, em valor absoluto, o dobro da área do quadrilátero Q.

2. Calcule a área do pentágono cujos vértices são os pontos $(-2,3)$, $(-1,0)$, $(1,0)$, $(2,3)$ e $(0,5)$.

3. Prove que a área de um polígono cujos n vértices têm coordenadas inteiras é um número inteiro ou a metade de um inteiro.

4. Sejam A, B e C pontos cujas coordenadas são números racionais. Assinale (V)erdadeiro ou (F)also:

( ) As medidas das alturas do triângulo ABC são números racionais.

( ) A área do triângulo ABC é um número racional.

5. Calcule a área do triângulo cujos vértices são interseções de duas das retas $x + y = 0, x - y = 0$ e $2x + y = 3$.

6. Dados os pontos $A = (1, 1), B = (2, 3)$ e $C = (4, 0)$, calcule a distância $d(B, C)$ e a área do triângulo ABC. A partir daí, obtenha a medida da altura baixada do vértice A.

11

Desigualdades Lineares

Toda reta decompõe o plano em duas regiões, chamadas *semi-planos*.

Se a reta r é representada pela equação $ax + by = c$, os semi-planos H^- e H^+ por ela determinados são definidos pelas desigualdades $ax + by \leq c$ e $ax + by \geq c$ respectivamente. Assim,

$$H^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by \leq c\} \text{ e } H^+\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by \geq c\}.$$

Na prática, dada a reta r pela equação $ax + by = c$, como saber qual dos dois semi-planos por ela determinados é $ax + by \leq c$ e qual é $ax + by \geq c$?

Considerando a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x, y) = ax + by$, a reta $ax + by = c$ é a linha de nível c da função φ. Como $\varphi(0, 0) = 0$, a origem está no nível zero de φ. Por outro lado, como $\varphi(a, b) = a^2 + b^2 > 0$, o ponto $A = (a, b)$ está no nível positivo $c = a^2 + b^2$. Logo, quando percorremos a reta OA no sentido de O para A, os níveis c das retas $ax + by = c$ (todas perpendiculares a OA) vão crescendo. Isto nos permite distinguir os semi-planos $ax + by \leq c$ e $ax + by \geq c$.

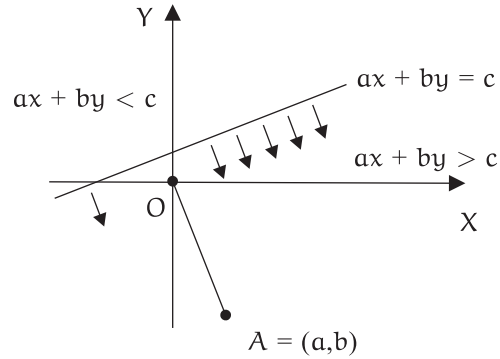


Figura 11.2 - A figura exibe os semi-planos $ax+by \geq c$ e $ax+by \leq c$.

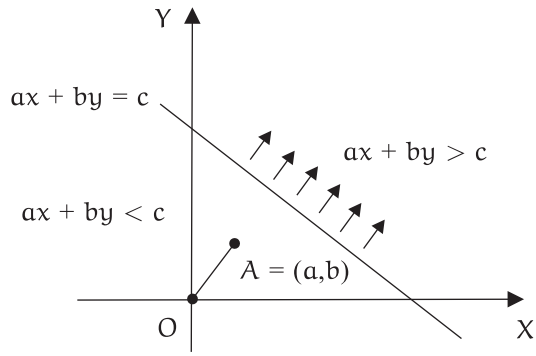


Figura 11.1 - As setas indicam o crescimento da função $\varphi(x,y)=ax+by$.

As figuras desta seção ilustram o fato de que, para $A = (a, b)$, o sentido de percurso de O para A é o sentido do crescimento da função $\varphi(x, y) = ax + by$.

Multiplicando, se for preciso, ambos os membros por -1, podemos sempre escrever qualquer desigualdade linear sob a forma $ax + by \leq c$.

Uma *solução* do sistema de desigualdades lineares

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &\leq c_1 \\ a_2x + b_2y &\leq c_2 \\ &\vdots \\ a_nx + b_ny &\leq c_n \end{aligned}$$

é um ponto $P = (x, y)$ cujas coordenadas x, y satisfazem todas as desigualdades do sistema. Isto equivale a dizer que o ponto P pertence a todos os semi-planos $H_1, H_2, \cdots, H_n$, definidos por essas desigualdades.

Assim, o conjunto das soluções do sistema acima é a interseção $H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n$ desses semi-planos.

Exemplo 11.1 O conjunto das soluções do sistema de desigualdades lineares

$$\begin{aligned} x + y &\leq 1 \\ -x + y &\leq 1 \\ -y &\leq 0 \end{aligned}$$

é a região do plano limitada pelo triângulo ABC, onde $A = (-1, 0), B = (1, 0)$ e $C = (0, 1)$. (Vide figura 11.3.)

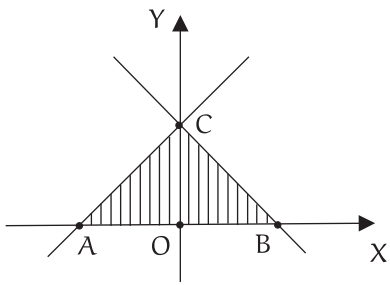


Figura 11.3 - O triângulo ABC delimita a região definida pelas desigualdades $x + y \leq 1$, $-x + y \leq 1$, $-y \leq 0$.

Exemplo 11.2 O sistema de desigualdades $x \geq 0, x + y \geq 1, y \geq 0, 2x - y \leq 3$ tem como conjunto de soluções a região ilimitada que vem hachurada na figura 11.4.

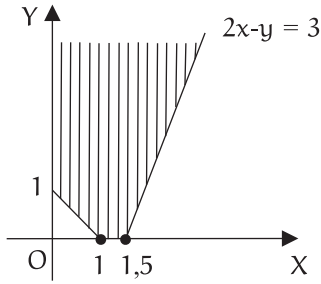


Figura 11.4 - Região definida pelas desigualdades $x \geq 0,\ x+y \geq 1,\ y \geq 0,\ 2x-y \leq 3$.

Os sistemas de desigualdades lineares ocorrem em problemas que consistem em maximizar (ou minimizar) funções lineares, do tipo $f(x, y) = \alpha x + \beta y$, onde as variáveis x, y são sujeitas a restrições sob a forma de um sistema de desigualdades lineares. Esses problemas são objeto de estudo de uma área da Matemática chamada Programação Linear.

Num problema de Programação Linear tem-se um sistema de desigualdades lineares

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &\leq c_1 \\ a_2x + b_2y &\leq c_2 \\ &\vdots \\ a_nx + b_ny &\leq c_n. \end{aligned}$$

Os pontos $P = (x, y)$ que são soluções deste sistema chamam-se pontos *viáveis*. Eles formam um conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^2$, o *conjunto de viabilidade*. É dada uma função linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \alpha x + \beta y$ e o problema consiste em determinar, entre os pontos viáveis $P = (x, y)$ aquele (ou aqueles) para os quais o valor $f(x, y) = \alpha x + \beta y$ é o maior possível.

Sabemos que as linhas de nível da função $f(x, y) = \alpha x + \beta y$ são as retas perpendiculares à reta OA, onde $A = (\alpha, \beta)$, isto é, em todos os pontos de uma dessas retas a função f assume um valor constante. Sabemos também que, ao deslocarmos essa linha de nível paralelamente a si mesma no sentido de O para A, o valor da função f cresce.

Daí resulta a observação fundamental seguinte: *o valor máximo de* f *no conjunto* V *dos pontos viáveis não pode ser atingido num ponto do interior de* V*; tem que ser atingido num ponto do bordo de* V.

Com efeito, se $P_0 = (x_0, y_0)$ é um ponto interior de V então a linha de nível que passa por P_0 pode ser deslocada um pouco, de modo a nos dar outros pontos de V nos quais f assume valores maiores do que $f(x_0, y_0)$.

Note-se que o bordo de V é formado por segmentos de reta ou (duas) semi-retas, que chamamos os *lados* de V. Assim, o valor máximo de f em V é atingido num dos vértices ou em todos os pontos de um dos lados de V (então esse lado está contido numa linha de nível de f). De qualquer modo, o máximo é atingido num vértice.

Vejamos dois exemplos, ilustrando essas possibilidades.

Exemplo 11.3 Consideramos o problema de maximizar a função $f(x, y) = 2x - y$, com as variáveis x, y sujeitas às restrições $x + y \leq 1, -x + y \leq 1, -y \leq 0$ (Vide Exemplo 11.1.)

O conjunto dos pontos viáveis é o triângulo ABC, com $A{=}(-1, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, 1)$. As linhas de nível de f são $2x - y = c$, ou $y = 2x - c$, perpendiculares ao segmento OP, $P = (2, -1)$ e os valores c da função $f(x, y) = 2x - y$ crescem quando essas linhas se deslocam no sentido de O para P. O valor máximo de f no triângulo V é atingido no vértice $(1, 0)$.

Esse valor é $f(1, 0) = 2 \cdot 1 - 0 = 2$. A resposta é 2.

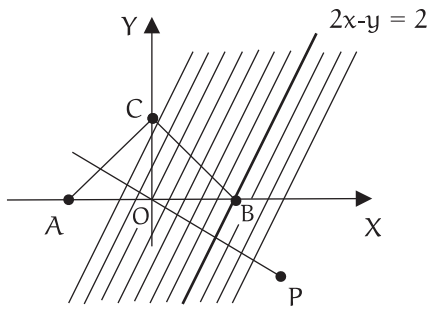


Figura 11.5 - Linhas de nível da função $f(x,y) = 2x - y$. O máximo de f em ABC é 2, atingido no vértice B.

Exemplo 11.4 Seja o problema de achar o maior valor da função $f(x, y) = 3x{-}2y$ com as variáveis x, y sujeitas às restrições $x \geq 0, x{+}y \geq 1, y \geq 0, 2x{-}y \leq 3$. O conjunto V dos pontos viáveis é aquele do Exemplo 11.2. As curvas de nível $3x{-}2y = c$ são perpendiculares ao segmento OA, onde $A = (3, -2)$ e o sentido de crescimento de c é de O para A.

O máximo de $f(x, y) = 3x - 2y$ em V é atingido no vértice $P = (3/2, 0)$, onde se tem $f(3/2, 0) = 9/2$.

Exemplo 11.5 Uma fábrica de rações para cães e para gatos produz rações de dois tipos, obtidos mediante a mistura de três ingredientes básicos: carne desidratada, farinha de milho e farinha de soja.

Ração para	**Carne desidr.**	**f. de milho**	**f. de soja**
Cães	3 kg	1 kg	1 kg
Gatos	2 kg	2 kg	-

A tabela acima indica as quantidades de ingredientes em um pacote de cada tipo de ração.

Para a próxima semana de produção, estão disponíveis 1200kg de carne desidratada, 800kg de farinha de milho e 300kg de farinha de soja. O lucro é de 40 reais em cada pacote de ração, para cães ou para gatos. A fábrica deseja decidir quantos pacotes produzir de cada tipo de ração de modo a maximizar o lucro.

Esta situação pode ser formulada matematicamente como um problema de Programação Linear. Sejam x e y os números de pacotes de ração para cães e gatos, respectivamente, a serem produzidos durante a semana. As limitações nas quantidades disponíveis dos ingredientes impõem restrições expressas por desigualdades lineares a serem satisfeitas por x e y. As seguintes relações devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &\leq 1200 \quad \text{(carne desidratada)} \\ x + 2y &\leq 800 \quad \text{(farinha de milho)} \\ x &\leq 300 \quad \text{(farinha de soja)} \end{aligned}$$

Além disto, deve-se ter $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Cada uma das cinco desigualdades acima corresponde a um semi-plano. A interseção desses cinco semi-planos é a região convexa R representada na figura 11.6. R é o conjunto de todas as soluções *viáveis* (ou possíveis) para o problema. Por exemplo, o ponto $(100, 100)$ está em R, o que indica que a fábrica pode produzir 100 pacotes de cada tipo de ração sem violar qualquer uma das cinco restrições.

O interesse da fábrica, porém, é maximizar a *função objetivo* $\varphi(x, y) = 40x + 40y$. O ponto $(100, 100)$ tem nível 8.000 em relação a φ; a linha de nível correspondente está representada na figura. É claro que $(100, 100)$

não é a melhor solução possível para o problema, já que há outros pontos de R situados em linhas de nível mais alto de φ. Para obter a solução do problema, a idéia é justamnte tomar a linha de nível mais alto de φ que ainda contenha pelo menos um ponto de R. Tal linha de nível é a que passa pelo ponto B de interseção das retas $3x + 2y = 1200$ e $x + 2y = 800$. De fato, a inclinação das linhas de nível de φ é igual a -1; as inclinações das retas $3x + 2y = 1200$ e $x + 2y = 800$ são $-3/2$ e $-1/2$, respectivamente. Como $-3/2 < -1 < -1/2$, a posição relativa das três retas é a indicada na figura 11.6, o que mostra que a linha de nível máximo de φ que contém pontos de R passa por B. O ponto B é obtido resolvendo o sistema

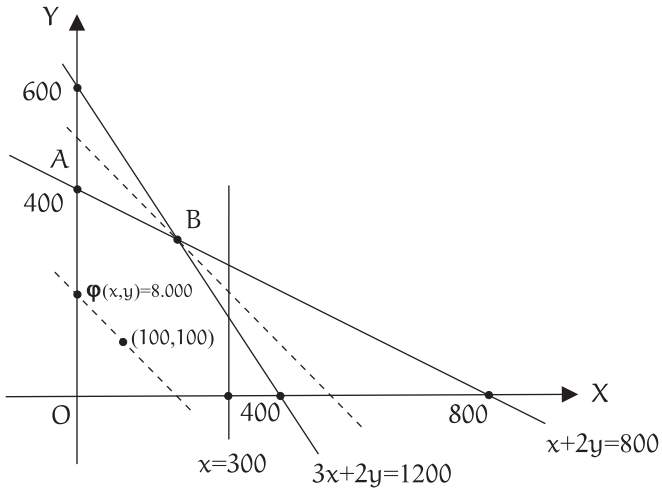


Figura 11.6 - Um problema de programação linear.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 1200 \\ x + 2y &= 800 \end{aligned}$$

que fornece $x = 200$ e $y = 300$.

Logo, a estratégia ótima para a fábrica é produzir 200 pacotes de ração para cães e 300 de ração para gatos, o que traz um lucro de 20.000 reais. Notamos que as quantidades disponíveis de farinha de milho e carne desidratada são inteiramente utilizadas, e que há uma sobra de farinha de soja.

É possível, porém, que todos os pontos de um dos lados de R sejam soluções ótimas. Caso a função objetivo no exemplo fosse, $\varphi(x, y) = 30x + 20y$, suas linhas de nível seriam paralelas à reta $3x + 2y = 1200$ e, em conseqüência, todos os pontos do segmento BC seriam soluções ótimas.

Observação 11.1 Um método prático de achar o ponto de máximo (ou de mínimo) de f consiste em calcular $f(P)$ para todo vértice P e ver qual desses valores é o maior (ou o menor).

Exercícios

1. Esboce o gráfico do conjunto das soluções de cada uma das desigualdades a seguir:
   a) $y \leq x^2$
   b) $x^2 + y^2 \geq 1$
   c) $x^2 + 2y^2 \leq 1$
   d) $|x| + |y| \leq 1$.

2. Para cada uma das regiões do plano descritas a seguir, escreva uma desigualdade ou sistema de desigualdades que a defina:

   a) O semi-plano abaixo da reta $2x + 3y - 6 = 0$.
   b) A região formada pelo interior e os lados do triângulo cujos vértices são $(0, 0), (3, 3)$ e $(4, 0)$.
   c) A parte da circunferência de centro $(1, 0)$ e raio 1 situada acima do eixo OY.

3. Uma pequena fábrica produz copos comuns e copos de vinho. Uma máquina automatiza parte do processo de fabricação. Para produzir uma caixa de copos comuns requer-se 1 hora de uso da máquina mais 1 hora de trabalho de um operário. A produção de uma caixa de copos de vinho requer apenas meia hora de uso da máquina mas ocupa 2 horas de trabalho operário. No período de uma semana, a fábrica dispõe de 80 horas de trabalho manual e 50 horas de uso da máquina. O lucro na venda de uma caixa de copos de vinho é de 50 reais e, numa caixa de copos comuns, o lucro é de 40 reais.

   a) Qual deve ser a produção semanal de cada tipo de copo de modo a maximizar o lucro?
   b) Suponha que, repentinamente, haja uma falta de copos de vinho no mercado, o que faz subir o preço de venda (portanto o lucro) de cada caixa de copos de vinho. Qual é o lucro máximo por caixa de copos de vinho para que a solução encontrada em a) continue ótima? Se o lucro exceder esse valor, qual será a solução ótima?

4. Os lados de um triângulo estão sobre as retas $y = 2x + 3, y = 2,1 \cdot x + 1$ e $y = 300$. Determine se o ponto $P = (142, 298)$ está no interior, no exterior ou num dos lados desse triângulo.

5. Um subconjunto C do plano chama-se *convexo* quando o segmento de reta que une dois pontos quaisquer de C está contido em C. Prove que o conjunto das soluções de um sistema de desigualdades lineares a duas incógnitas é um conjunto convexo.

6. Esboce o gráfico do conjunto das solucões de cada um dos sistemas de desigualdades lineares a seguir

$$\begin{cases} 2x + y \geq 4 \\ -2x + y \geq 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y \geq 1 \\ y \geq x \\ y \geq 2 - 2x \end{cases}$$

7. Determine o menor valor que $x + 2y$ assume no conjunto definido pelas desigualdades

$$\begin{cases} x + y \geq 1 \\ -x + y \geq -1 \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

8. No exercício anterior, o que ocorre se o objetivo for maximizar $x + 2y$ sujeito às mesmas restrições?

9. Um banco europeu dispõe de 100 milhões de euros para aplicar imediatamente. Duas opções lhe são oferecidas:

Opção A: 10% ao ano, baixa liquidez.

Opção B: 5% ao ano, alta liquidez.

A diretoria decide que, por segurança, o total investido na opção A no máximo será 3 vezes o que foi investido na opção B.

O objetivo do banco é receber o máximo de juros dentro dessas condições. Quantos euros em cada opção deve o banco investir?

10. Um agricultor costuma plantar feijão e arroz. Sua propriedade dispõe de 40ha de terra cultivável mas apenas 20ha podem ser usados para plantar arroz.

Ele tem condições de pagar 2400 horas de trabalho no verão e 1380 horas no inverno. Suas culturas apresentam as seguintes características:

	lucro por ha.	**horas de trabalho por ha. no verão**	**horas de trabalho por ha. no inverno**
feijão	450	30	24
arroz	1200	120	60

Quantos hectares de feijão e quantos de arroz ele deve plantar de modo a maximizar seu lucro? (A área utilizada para plantar cada um dos cereais é a mesma em ambos os plantios.)

12

Equação da Circunferência

A circunferência de centro $A = (a, b)$ e raio $r > 0$ é o conjunto Γ formado pelos pontos $P = (x, y)$ tais que $d(A, P) = r$. Assim, $P = (x, y)$ pertence a Γ se, e somente se,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

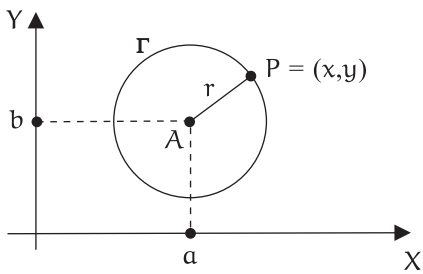


Figura 12.1 - Circunferência Γ, de centro A e raio r.

Esta é, portanto, a equação da circunferência. No caso particular em que o centro da circunferência é a origem $O = (0, 0)$, a equação assume a forma simplificada

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Exemplo 12.1 Determine a equação da circunferência que tem OA como diâmetro, sendo $A = (a, 0)$. Neste caso, o centro é o ponto $(\frac{a}{2}, 0)$

e o raio é $|a|/2$. Logo a equação é

$$(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Exemplo 12.2 Obter as equações das tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ que passam pelo ponto $A = (a, 0)$.

A reta tangente a uma circunferência pode ser caracterizada de duas maneiras: por tocar a circunferência num único ponto ou por ser perpendicular ao raio no ponto de contacto. A estas duas propriedades correspondem duas maneiras de resolver este problema. Vejamos a primeira. As retas não-verticais que passam pelo ponto $A = (a, 0)$ têm equação da forma $y = m(x-a)$. Devemos determinar a inclinação m de modo que a interseção da reta com a circunferência se reduza a um único ponto. Essa interseção se obtém substituindo y por $m(x-a)$ na equação $x^2+y^2 = r^2$. Obtemos

$$x^2 + m^2(x - a)^2 = r^2,$$

ou

$$(1 + m^2)x^2 - 2am^2x + a^2m^2 - r^2 = 0.$$

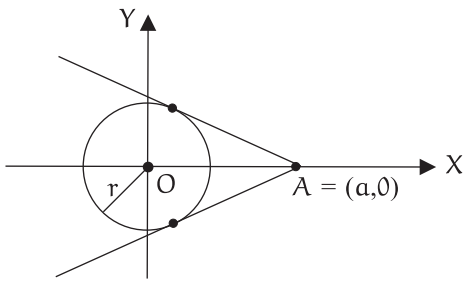


Figura 12.2 - As duas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ partindo do ponto $A = (a,0)$.

A fim de que esta equação do segundo grau tenha uma única raiz, seu discriminante deve ser igual a zero. Isto nos dá

$$4a^2m^4 - 4(1 + m^2)(a^2m^2 - r^2) = 0.$$

Simplificando, temos: $(a^2 - r^2)m^2 = r^2$, donde

$$m = \pm \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Portanto as retas

$$y = \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}(x - a) \quad \text{e} \quad y = \frac{-r}{\sqrt{a^2 - r^2}}(x - a)$$

são as tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ (de centro O e raio r) tiradas do ponto $A = (a, 0)$. A expressão $a^2 - r^2$ sob o radical corresponde ao fato de que, quando $|a| \leq r$, o ponto $A = (a, 0)$ está no interior da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ ou sobre ela. Se estiver no interior, não se pode traçar por ele uma tangente. Se estiver sobre a circunferência ($a = r$ ou $a = -r$), a tangente é vertical e sua equação ($x = r$ ou $x = -r$) não é da forma $y = m(x - a)$.

A segunda maneira de resolver este problema consiste em observar que, se $P = (x, y)$ é um ponto da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ tal que a reta AP é tangente então o ângulo $O\widehat{P}A$ é reto, logo P está também na circunferência de diâmetro OA, cuja equação é

$$(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4},$$

ou seja,

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Substituindo, nesta última equação $x^2 + y^2$ por r^2 e cortando $a^2/4$, obtemos $ax = r^2$, logo $x = r^2/a$. Segue-se que $y^2 = r^2 - x^2 = r^2 - r^4/a^2$, donde

$$y = \pm \frac{r}{a}\sqrt{a^2 - r^2}.$$

Portanto os pontos de tangência (ou de interseção das duas circunferências) são

$$P = (\frac{r^2}{a}, \frac{r}{a}\sqrt{a^2 - r^2}) \quad \text{e} \quad P' = (\frac{r^2}{a}, -\frac{r}{a}\sqrt{a^2 - r^2}).$$

A inclinação da reta AP é

$$\frac{\frac{r}{a}\sqrt{a^2 - r^2}}{\frac{r^2}{a} - a} = \frac{r\sqrt{a^2 - r^2}}{r^2 - a^2} = -\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}},$$

logo a equação desta reta é

$$y = -\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}(x - a)$$

enquanto a equação da tangente AP' é $y = \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}(x - a)$.

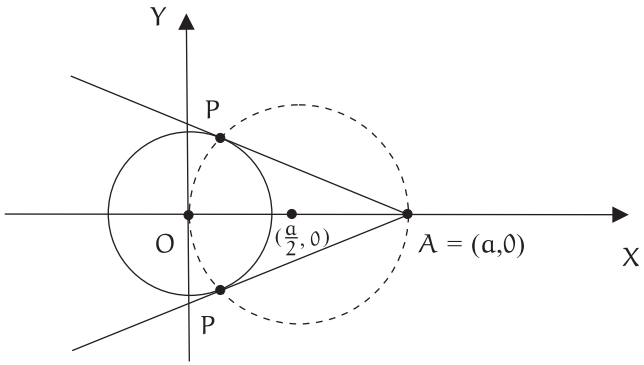


Figura 12.3 - Os pontos de tangência como interseção de duas circunferências.

Exercícios

1. Dados os pontos $A = (2,4), B = (3,1)$ e $C = (5,3)$, obtenha as equações das retas mediatrizes dos segmentos AB e BC e determine as coordenadas da interseção dessas retas. A partir daí, ache a equação da circunferência que passa por A, B e C.
2. No exercício anterior, mantenha os pontos A e B mas substitua C pelo ponto $D = (1,7)$. Qual será a resposta?
3. Com os mesmos dados do primeiro exercício, obtenha as coordenadas do centro $P = (x, y)$ da circunferência ABC resolvendo o sistema de equações $d(A,P)^2 = d(B,P)^2$ e $d(B,P)^2 = d(C,P)^2$, nas incógnitas x e y. Observe que, após simplificações, este sistema é o mesmo obtido anteriormente.
4. Qual é a equação da circunferência que passa pelos pontos $A = (1,2), B = (3,4)$ e tem o centro sobre o eixo OY?
5. Escreva a equação da circunferência que tem centro no ponto $P = (2,5)$ e é tangente à reta $y = 3x + 1$.
6. O ponto $P = (x_1, y_1)$ pertence à circunferência Γ de centro (a, b) e raio r. Qual é a equação da tangente a Γ no ponto P?

7. Sabendo que $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$, são equações paramétricas da circunferência $x^2 + y^2 = 1$, obter equações paramétricas para a circunferência de centro $P = (a, b)$ e raio r.

8. Fixado a, quais devem ser os dois valores de b para os quais a reta $y = ax + b$, de inclinação a, seja tangente à circunferência de centro O e raio r?

9. A tangente, no ponto P, à circunferência de centro O e raio 3 é paralela à reta $y = -2x + 1$. Quais são as coordenadas de P? E se o raio da circunferência fosse 5?

10. Mostre que a reta $y = ax + b$ é tangente à circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ se, e somente se, $b^2 = (1 + a^2)r^2$.

11. Ache as equações das retas que passam pelo ponto $(2, 5)$ e são tangentes à circunferência de centro O e raio 3.

12. Esboce o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem a equação $x^3 + xy^2 - x - x^2y - y^3 + y = 0$.

13. Escreva, sob a forma $ax + by = c$, a equação da tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 1$ que toca no ponto (x_1, y_1) dessa curva.

13

Reconhecimento da Equação da Circunferência

A equação da circunferência de raio r e centro no ponto de coordenadas (a, b) se escreve, por extenso, assim:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0.$$

Mostraremos agora que, *dada a equação*

$$(*) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ *cujas coordenadas a satisfazem é uma circunferência se, e somente se,* $A = C \neq 0, B = 0$ *e* $D^2 + E^2 > 4AF$.

A parte "se" da afirmação acima vem de ser provada. Demonstraremos agora a parte "somente se". Temos uma circunferência Γ, de raio r, e sabemos que um ponto pertence a ela se, e somente se, suas coordenadas (x, y) satisfazem a equação $(*)$ acima. Queremos provar que $A = C \neq 0, B = 0$ e $D^2 + E^2 > 4AF$.

Suponhamos inicialmente que o centro da circunferência Γ seja o ponto $O = (0, 0)$. Então os pontos de coordenadas $(-r, 0)$ e $(r, 0)$ pertencem a Γ. Substituindo sucessivamente estes valores na equação dada, obtemos

$$Ar^2 - Dr + F = 0 \quad \text{e} \quad Ar^2 + Dr + F = 0.$$

Destas duas igualdades resulta que $D = 0$ e que $Ar^2 + F = 0$, ou seja, $A = -F/r^2$. Como a origem não pertence a Γ, o par $(0, 0)$ não satisfaz a equação dada, logo $F \neq 0$ e daí segue-se que $A \neq 0$.

De modo análogo, levando em conta que os pontos de coordenadas $(0, r)$, e $(0, -r)$ também estão sobre Γ, concluímos que $E = 0$ e $C = -F/r^2$.

Portanto $A = C \neq 0$ e $D = E = 0$. A equação dada se reduz a

$$Ax^2 + Ay^2 + Bxy + F = 0.$$

Como o centro da circunferência Γ, de raio r, é a origem $O = (0, 0)$, as coordenadas (x, y) de todos dos seus pontos cumprem a relação $x^2+y^2 = r^2$, logo a equação acima pode ser escrita assim:

$$Ar^2 + Bxy + F = 0.$$

Se fosse $B \neq 0$, daí tiraríamos que $xy = -(F + Ar^2)/B = 0/B = 0$ e o produto xy das coordenadas de um ponto qualquer (x, y) em Γ seria zero, o que não é verdade. Logo $B = 0$.

Resumindo: se $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, é a equação de uma circunferência com centro na origem do sistema de coordenadas então $A = C \neq 0$ e $B = 0$. (Tem-se ainda, neste caso, $D = E = 0$, mas isto não vale quando o centro não é a origem.)

Passemos ao caso geral. Se o centro da circunferência Γ é um ponto arbitrário $P = (a, b)$, consideramos a nova circunferência Γ', de mesmo raio r, com centro na origem.

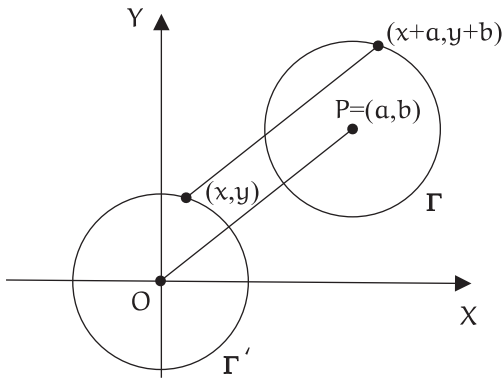


Figura 13.1 - Uma translação leva a circunferência Γ sobre Γ'.

O ponto de coordenadas (x, y) pertence a Γ' se, e somente se, o ponto

de coordenadas $(x+a, y+b)$ pertence a Γ, isto é, se, e somente se,

$$A(x+a)^2 + C(y+b)^2 + B(x+a)(y+b) + D(x+a) + E(y+b) + F = 0$$

ou

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + D'x + E'y + F' = 0.$$

Esta última equação representa, portanto, a circunferência Γ'. Note que os coeficientes A, B e C são os mesmos da equação de Γ. (Os demais coeficientes D', E', F' não nos interessam.) Como Γ' tem centro na origem, o que vimos acima nos dá $A = C \neq 0$ e $B = 0$.

Assim, a equação dada se reduz a

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0.$$

Completando os quadrados, esta última equação se escreve:

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}.$$

Daí resulta imediatamente que $D^2 + E^2 > 4AF$. Isto completa a demonstração.

Fica então claro que se $D^2 + E^2 > 4AF$, a equação

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa uma circunferência cujo centro é

$$\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right) \quad \text{e cujo raio é} \quad \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2|A|}.$$

Observação 13.1 "Completar o quadrado" significa escrever

$$x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2.$$

No presente caso temos

$$x^2 + \frac{D}{A}x = x^2 + 2\frac{D}{2A}x = \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{D^2}{4A^2}$$

e, analogamente,

$$y^2 + \frac{E}{A}y = \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 - \frac{E^2}{4A^2}.$$

Este método, que é útil no estudo de funções quadráticas de uma ou mais variáveis, será utilizado outras vezes aqui.

Exemplo 13.1 Na equação $3x^2+3y^2-2x+7y+4=0$, temos $D^2+E^2 = 4+49 = 53$ e $4AF = 4\cdot 3\cdot 4 = 48$. Como $53 > 48$, ela é a equação de uma circunferência, cujo centro e cujo raio acharemos completando os quadrados. A equação dada equivale a

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}y + \frac{4}{3} = 0,$$

ou

$$x^2 - 2\cdot\frac{1}{3}x + \frac{1}{9} + y^2 + 2\cdot\frac{7}{6}y + \frac{49}{36} + \frac{4}{3} - \frac{1}{9} - \frac{49}{36} = 0$$

ou ainda:

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{5}{36} = \left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2.$$

Portanto o centro da circunferência é o ponto $(\frac{1}{3}, -\frac{7}{6})$ e seu raio é $\frac{\sqrt{5}}{6}$.

Exemplo 13.2 Na equação $3x^2 + 3y^2 - 2x + 7y + 5 = 0$ temos $A = C, B = 0$, mas $D^2+E^2 = 53 < 4AF = 60$. Se completarmos os quadrados, veremos que ela equivale a

$$(x - \frac{1}{3})^2 + (y + \frac{7}{6})^2 = -\frac{7}{36},$$

uma igualdade que não é satisfeita sejam quais foram x e y reais. Logo a equação dada não tem solução real. Ela representa o conjunto vazio.

Exemplo 13.3 Se completarmos os quadrados na equação $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25 = 0$ veremos que ela equivale a $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 0$, igualdade que só é válida quando $x = -3$ e $y = 4$. Logo a equação dada representa o ponto $(-3, 4)$. Nela, tem-se $A = C = 1, B = 0$, mas $D^2 + E^2 = 4AF$.

Exercícios

1. Mostre que a equação da tangente à circunferência $Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$ no ponto (x_1, y_1) é $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$, onde $a=x_1+D/2A$ e $b=x_2+E/2A$.

2. Para cada uma das equações abaixo, descreva o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas a satisfazem:

a) $x^2+y^2=x$;

b) $x^2+y^2+y=0$;

c) $x^2+y^2+x+y=0$;

d) $x^2+y^2+x+y=1$.

3. Diz-se que duas circunferências se cortam ortogonalmente quando, em cada ponto da sua interseção, as tangentes respectivas são perpendiculares. Isto ocorre se, e somente se, o quadrado da distância entre seus centros é igual à soma dos quadrados dos seus raios (por quê?). A partir daí, mostre que as duas circunferências

$$x^2+y^2-4x+5y-2=0 \quad \text{e}$$
$$2x^2+2y^2+4x-6y-19=0$$

cortam-se ortogonalmente.

4. Completando os quadrados, decida se cada uma das equações abaixo define uma circunferência, um ponto ou o conjunto vazio:

a) $2x^2+2y^2-3x+y-1=0$;

b) $-x^2-y^2+6x-4y+3=0$;

c) $x^2+y^2-10x+2y+26=0$;

d) $4x^2+4y^2-4x-8y+21=0$.

5. Se $Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$ é a equação de uma circunferência, quais são as coordenadas do centro?

6. Diz-se que a reta $r: ax+by=c$ corta a circunferência $\Gamma: Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$ ortogonalmente quando r é perpendicular à tangente de Γ em cada ponto da interseção $r\cap\Gamma$. Prove que isto ocorre se, e somente se, $aD+bE+2cA=0$.

7. Sabendo que $a^2+b^2=1$, decida se a equação $x^2+y^2-2(am+bn)x-2(an-bm)y+m^2+n^2=r^2$ representa uma circunferência, um ponto ou o conjunto vazio.

14

Vetores no Plano

Vetores servem principalmente para deslocar pontos ou, mais precisamente, efetuar translações. Deslocando cada um dos pontos de uma figura, o vetor efetua uma translação dessa figura.

Para estudar os vetores do plano, retomamos o conceito de equipolência, já visto na Seção 2.

Lembremos que um segmento de reta diz-se *orientado* quando se estipulou qual de suas extremidades é a inicial (ou a primeira); a outra será a extremidade final (ou a segunda). Quando se disser "o segmento de reta orientado AB", ficará subentendido que A é o ponto inicial e B o final.

Dois segmentos de reta no mesmo plano dizem-se *equipolentes* quando:

1) Têm o mesmo comprimento;

2) São paralelos ou colineares;

3) Têm o mesmo sentido.

As condições 1) e 2) são claras. Quanto à terceira, se os segmentos orientados AA' e CC' são paralelos e têm o mesmo comprimento, diz-se que eles têm o *mesmo sentido* quando AA' e CC' são lados opostos de um paralelogramo do qual os outros lados opostos são AC e $A'C'$. (Observe que, se isto ocorre, então $A'C$ e AC' não são lados opostos e sim diagonais daquele paralelogramo, logo $A'A$ não é equipolente a CC'.)

Se AA' e CC' são segmentos orientados colineares, dizer que eles têm o mesmo sentido (de percurso) significa afirmar que uma das semi-retas $\overrightarrow{AA'}$ e $\overrightarrow{CC'}$ está contida na outra.

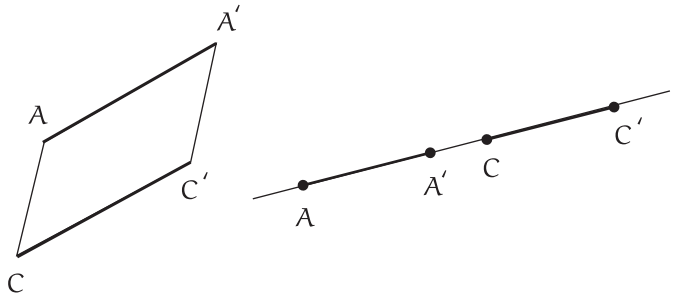


Figura 14.1 - Segmentos equipolentes: colineares e não-colineares.

A fim de que os segmentos orientados AA' e CC' sejam equipolentes é necessário e suficiente que o ponto médio do segmento AC' coincida com o ponto médio de $A'C$. Daí resulta (como vimos na Seção 2) que, fixado um sistema de coordenadas no plano, se $A = (a, b), A' = (a', b'), C = (c, d)$ e $C' = (c', d')$, para que os segmentos orientados AA' e CC' sejam equipolentes é necessário e suficiente que $a' - a = c' - c$ e $b' - b = d' - d$.

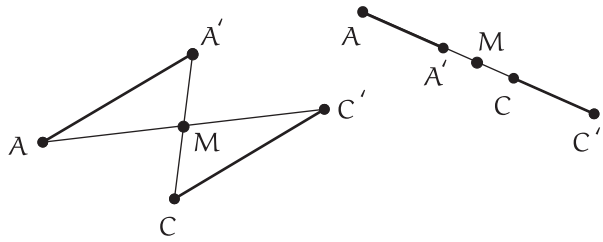


Figura 14.2 - AA' e CC' são equipolentes porque AC' e $A'C$ têm o mesmo ponto médio.

Dado o segmento orientado AA', para cada ponto P do plano existe um único ponto P' tal que o segmento orientado PP' é equipolente a AA'. Se P não pertence à reta AA' então P' é simplesmente o quarto vértice do paralelogramo do qual AA' e AP são lados consecutivos. Se P é colinear com A e A' então P' deve ser tomado sobre a reta AA' de modo que $d(P, P') = d(A, A')$ e os sentidos de percurso de A para A' e de P para P' coincidam. Se $A = (a, b), A' = (a', b')$ e $P = (x, y)$ então $P' = (x + \alpha, y + \beta)$, onde $\alpha = a' - a$ e $\beta = b' - b$.

Quando os segmentos orientados AA' e CC' são equipolentes, diz-se que eles representam o mesmo *vetor* v. Escreve-se então $v = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$.

Como vimos acima, dados o vetor $v = \overrightarrow{AA'}$ e o ponto P, existe um único ponto P' tal que $\overrightarrow{PP'} = v$. Escreve-se $P' = P + v$ e diz-se que o vetor v transportou o ponto P até a posição P'. (Aliás, a palavra vetor provém do latim *vehere*, que significa transportar.) Assim, $P' = P + v$ significa $v = \overrightarrow{PP'}$.

Costuma-se representar o vetor $v = \overrightarrow{AA'}$ por uma flecha com origem no ponto A, apontando para o ponto A'. A observação anterior significa que o início dessa flecha pode ser colocado em qualquer ponto P do plano, obtendo-se flechas graficamente diferentes porém representando o mesmo vetor.

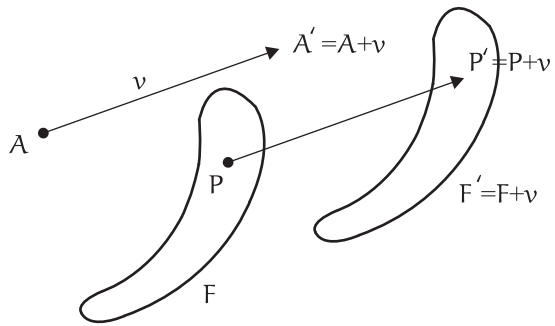


Figura 14.3 - O vetor v transporta o ponto A para a posição $A' = A+v$ e a figura F para a posição $F' = F+v$.

Fixando-se arbitrariamente um vetor v no plano Π, tem-se uma transformação (= função) $T_v : \Pi \to \Pi$, chamada a *translação* determinada por v. A cada ponto $P \in \Pi$, a translação faz corresponder o ponto $T_v(P) = P'$ tal que $\overrightarrow{PP'} = v$, ou seja, $P' = P + v$.

Se $F \subset \Pi$ é qualquer figura (= subconjunto do plano Π), o conjunto

$$F + v = \{P + v; P \in F\} = T_v(F).$$

chama-se o *transladado* do conjunto F pelo vetor v.

Seja $v = \overrightarrow{AA'}$. Se $A = (a, b)$ e $A' = (a', b')$ então os números $\alpha = a' - a$ e $\beta = b' - b$ chamam-se as *coordenadas do vetor* v no sistema

de coordenadas considerado. Escreve-se então $v = (\alpha, \beta)$. Esta definição se justifica observando que se $v = \overrightarrow{CC'}$ (portanto os segmentos orientados AA' e CC' são equipolentes) então, para $C = (c, d)$ e $C' = (c', d')$ tem-se ainda $c' - c = \alpha$ e $d' - d = \beta$. Dizer que $v = (\alpha, \beta)$ equivale a afirmar que, quando se escreve $v = \overrightarrow{OA'}$, isto é, quando se representa v por um segmento orientado com início em $O = (0, 0)$, então $A = (\alpha, \beta)$.

Quando se fixa um sistema em relação ao qual o vetor v tem coordenadas (α, β), a translação $T_v : \Pi \to \Pi$ leva o ponto $P = (x, y)$ no ponto $T_v(P) = P + v$, ou seja,

$$T_v(P) = (x + \alpha, y + \beta).$$

Daí resulta imediatamente que a translação $T_v : \Pi \to \Pi$ preserva distâncias, isto é, se $P' = T_v(P)$ e $Q' = T_v(Q)$ então $d(P', Q') = d(P, Q)$. Esta igualdade se torna óbvia se notarmos que se $P = (x, y)$ e $Q = (s, t)$, então

$$P' = (x + \alpha, y + \beta), \quad Q' = (s + \alpha, t + \beta),$$

logo

$$\begin{aligned} d(P', Q') &= \sqrt{(x + \alpha - s - \alpha)^2 + (y + \beta - t - \beta)^2} \\ &= \sqrt{(x - s)^2 + (y - t)^2} = d(P, Q). \end{aligned}$$

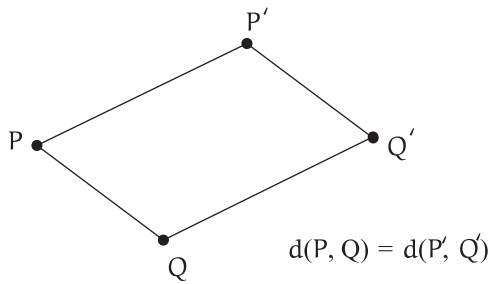


Figura 14.4 - Se a translação T_v leva P em P' e Q em Q' então $d(P, Q) = d(P', Q')$.

Preservando distâncias, a translação T_v também preserva áreas. Este fato, na verdade, já foi usado na Seção 9 quando, a fim de calcular a área de um triângulo, o deslocamos por uma translação, de modo a fazer com que um dos seus vértices coincidisse com a origem.

Exemplo 14.1 Vamos usar vetores para resolver um problema interessante.
Recentemente foi descoberto um manuscrito do pirata Barba Negra descrevendo a localização de um tesouro enterrado por ele em certa ilha do Caribe. O manuscrito identifica perfeitamente a ilha e dá as seguintes instruções.

"... qualquer um que desembarque nesta ilha verá imediatamente um carvalho, que chamarei de A, uma figueira, que chamarei de B, e uma palmeira, que chamarei de C. Eu enterrei o tesouro em um ponto X que pode ser encontrado assim:

Caminhe de C para A contando seus passos. Chegando em A, vire para a esquerda e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto M.

Volte ao ponto C.

Caminhe de C para B contando seus passos. Chegando em B, vire para a direita e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto N.

O ponto X está na reta que liga M a N, e a mesma distância desses dois pontos".

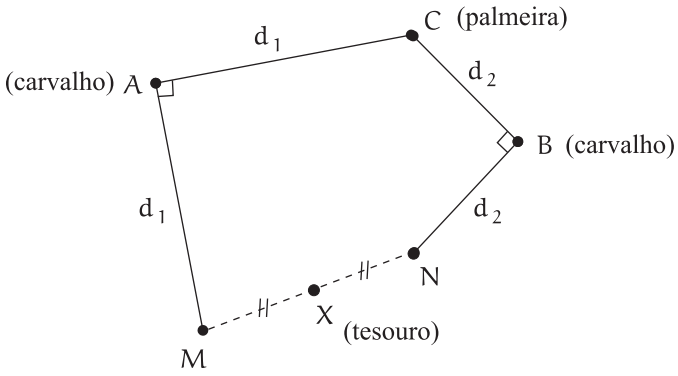


Figura 14.5 - Mapa do tesouro.

Com essas precisas informações, os exploradores chegaram à referida ilha mas tiveram uma desagradável surpresa. O carvalho A e a figueira B estavam, mas a palmeira C tinha desaparecido.

O tesouro parecia perdido.

Entretanto, fazia parte da comitiva um matemático que, após breves cálculos, conseguiu descobrir o tesouro.

Como ele fez isso?

O matemático estabeleceu na ilha, que era plana, um sistema de coordenadas com origem A e com o ponto B no eixo dos x. Ele mediu a distância de A até B e encontrou 40 metros. Assim, ficou estabelecido que $A = (0,0)$, $B = (40,0)$. Para a palmeira desaparecida ele pôs $C = (x,y)$.

Temos então: $\overrightarrow{AC} = (x,y)$, $\overrightarrow{AM} = (y,-x)$, $\overrightarrow{BC} = (x-40,y)$ e $\overrightarrow{BN} = (-y,x-40)$. Como A é a origem, as coordenadas do ponto M são $M = (y,-x)$.

Por sua vez, $N = B + \overrightarrow{BN} = (40-y,x-40)$.

Sendo X o ponto médio de MN, suas coordenadas são dadas por

$$X = \left(\frac{y+40-y}{2}, \frac{-x+x-40}{2}\right) = (20,-20).$$

Portanto, para encontrar o tesouro, bastava andar 20m na direção de A para B e depois virar à direita e andar mais 20m. A localização do tesouro ficou independente da palmeira.

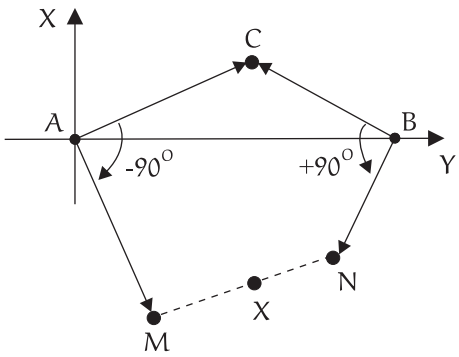


Figura 14.6 - Usando vetores para achar o tesouro.

Exercícios

1. Sejam AA', BB' e CC' segmentos de reta no plano, Se AA' é equipolente a BB' e BB' é equipolente a CC', prove que AA' e CC' são equipolentes.

2. Prove geometricamente que um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se cortam mutuamente ao meio.

3. Seja $T_v : \Pi \to \Pi$ uma translação do plano Π. Se $T_v(A) = A', T_v(B) = B'$ e $T_v(C) = C'$, prove que os ângulos $B\widehat{A}C$ e $B'\widehat{A}'C'$ têm a mesma medida.

15

Operações com Vetores

Uma coisa agradável a respeito de vetores é que se podem efetuar operações entre eles. As propriedades dessas operações tornam-se particularmente simples se convencionarmos em admitir o *vetor nulo* $\overrightarrow{AA}$, determinado por um segmento degenerado, no qual o início e a extremidade final se reduzem a um mesmo ponto.

Mais precisamente, dois pontos quaisquer do plano são equipolentes; assim o vetor nulo $\overrightarrow{AA}$ pode ter, como os demais vetores, sua origem localizada em qualquer ponto do plano. Usaremos o mesmo símbolo 0 para representar tanto o vetor nulo quanto o número zero. Em qualquer sistema, as coordenadas do vetor nulo são $(0, 0)$.

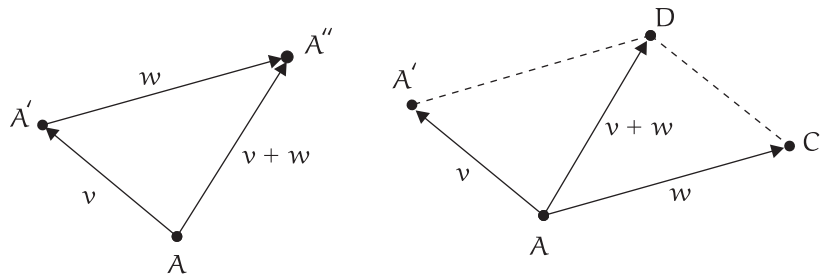


Figura 15.1 - Dois modos de definir $v + w$.

A *soma* de dois vetores v e w pode ser definida de duas maneiras equivalentes. A primeira consiste em representar $v = \overrightarrow{AA'}$ e, em seguida,

representar $w = \overrightarrow{A'A''}$ por um segmento orientado cujo início seja a extremidade final A' do primeiro segmento e pôr $v + w = \overrightarrow{AA''}$, por definição. A outra maneira consiste em representar os vetores $v = \overrightarrow{AA'}$ e $w = \overrightarrow{AC}$ por segmentos orientados com o mesmo início e definir $v + w = \overrightarrow{AD}$, onde AD é a diagonal do paralelogramo que tem dois lados consecutivos iguais a AA' e AC. A primeira definição funciona mesmo que os segmentos AA' e $A'A''$ sejam colineares. A segunda só faz sentido (isto é, só se tem um paralelogramo) quando A, A' e C não estão sobre a mesma reta.

Fixando um sistema de coordenadas no plano, sejam $v = (\alpha, \beta)$ e $w = (\gamma, \delta)$. Se $A = (a, b)$ e $\overrightarrow{AA'} = v$ então $A' = (a + \alpha, b + \beta)$. Analogamente, se $\overrightarrow{A'A''} = w$ então $A'' = (a + \alpha + \gamma, b + \beta + \delta)$. Por definição, tem-se $v + w = \overrightarrow{AA''}$. Logo as coordendas de $v + w$ são $a + \alpha + \gamma - a = \alpha + \gamma$ e $b + \beta + \delta - b = \beta + \delta$.

Portanto se $v = (\alpha, \beta)$ e $w = (\gamma, \delta)$ então $v + w = (\alpha + \gamma, \beta + \delta)$.

Dado o vetor $v = \overrightarrow{AA'}$, seu *simétrico*, ou *oposto* é o vetor $-v = \overrightarrow{A'A}$. Se, num determinado sistema de coordenadas, tem-se $v = (\alpha, \beta)$ então $-v = (-\alpha, -\beta)$. Vale $-v + v = v + (-v) = 0$, por isso $-v$ também se chama o *inverso aditivo* do vetor v.

Sabendo que cada coordenada do vetor $v + w$ é a soma das coordenadas correspondentes de v e w, é fácil deduzir as propriedades formais da adição de vetores a partir de suas análogas para a adição de números reais.

Tem-se assim, para quaisquer vetores u, v e w:

comutatividade: $v + w = w + v$;
associatividade: $(u + v) + w = u + (v + w)$;
elemento neutro: $v + 0 = 0 + v = v$;
inverso aditivo: $-v + v = v + (-v) = 0$.

Outra operação é a multiplicação de um vetor v por um número real t, dando como resultado o vetor tv.

O produto tv se define assim: se $t = 0$ ou $v = 0$, põe-se $tv = 0$. Se $t > 0$ e $v = \overrightarrow{AA'} \neq 0$, põe-se $tv = \overrightarrow{AA''}$, onde A'' é o ponto da reta AA' tal que os segmentos orientados AA' e AA'' têm o mesmo sentido e $d(A, A'') = t \cdot d(A, A')$. E, para $t = -|t|$ negativo, põe-se $tv = -(|t|v)$.

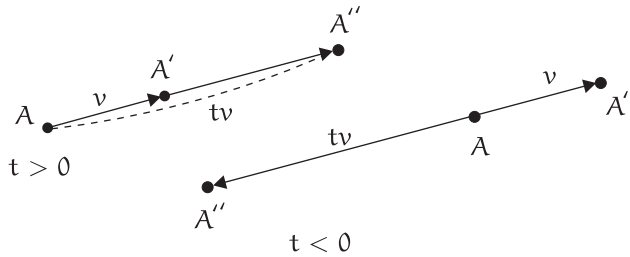


Figura 15.2 - O produto do número real t pelo vetor v.

Se, num determinado sistema de coordenadas, tivermos $v = (\alpha, \beta)$, afirmamos que, para todo $t \in \mathbb{R}$, vale $tv = (t\alpha, t\beta)$.

Com efeito, representando v por um segmento orientado com início em $O = (0, 0)$, temos $v = \overrightarrow{OA}$, onde $A = (\alpha, \beta)$. Como sabemos, os pontos da reta OA têm coordenadas $(t\alpha, t\beta)$, onde t varia em $\mathbb{R}$. A fórmula da distância entre dois pontos mostra que, para $A' = (t\alpha, t\beta)$, tem-se $d(O, A') = |t| \cdot d(O, A)$.

Logo $tv = \overrightarrow{OA'} = (t\alpha, t\beta)$ se $t > 0$. E, se $t < 0$, temos $tv = -(|t|v) = -(|t|\alpha, |t|\beta) = (-|t|\alpha, -|t|\beta) = (t\alpha, t\beta)$, completando a demonstração.

Da expressão $tv = (t\alpha, t\beta)$ quando $v = (\alpha, \beta)$ resultam imediatamente as seguintes propriedades formais:

associatividade: $s(tv) = (st)v$;

distributividade: $(s + t)v = sv + tv, t(v + w) = tv + tw$;

válidas para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$ e quaisquer vetores v, w.

Uma terceira operação entre vetores do plano é o produto interno. Antes de introduzi-lo, observemos que se v e w são vetores não-nulos, o ângulo entre v e w é, por definição, o ângulo $B\widehat{A}C$, onde $v = \overrightarrow{AB}$ e $w = \overrightarrow{AC}$ são representações dos vetores dados mediante segmentos orientados com o mesmo início A. É claro que diferentes escolhas do ponto inicial A produzem ângulos congruentes.

Diz-se que os vetores não-nulos u, v são *colineares* quando, ao serem representados na forma $u = \overrightarrow{AB}, v = \overrightarrow{AC}$, por segmentos orientados com o mesmo ponto inicial, os pontos A, B e C são colineares. Isto equivale a dizer que um desses vetores é múltiplo do outro: $v = t \cdot u$ para algum $t \in \mathbb{R}$.

Como os pontos A, A e B são sempre colineares, admitiremos que

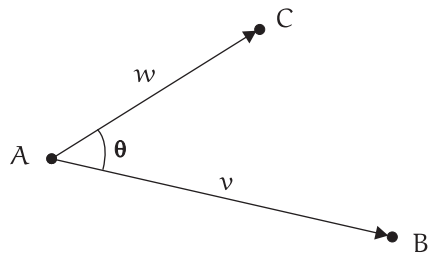


Figura 15.3 - O ângulo entre os vetores não-nulos v e w.

todo vetor é colinear ao vetor zero. Isto corresponde ao fato de que $0 = 0 \cdot v$ é múltiplo de qualquer vetor v.

Se os vetores $u = (\alpha, \beta)$ e $v = (\gamma, \delta)$ são dados por suas coordenadas num certo sistema, u e v são colineares se, e somente se, $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$.

Dois vetores não-colineares serão chamados de *linearmente independentes* (L.I.). Em termos de coordenadas $u = (\alpha, \beta)$ e $v = (\gamma, \delta)$, isto significa que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

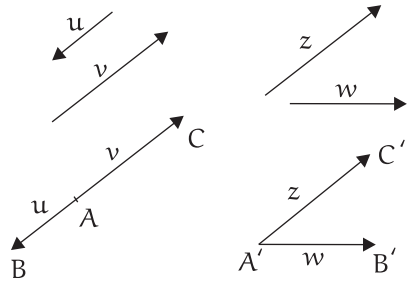


Figura 15.4 - Os vetores u e v são colineares mas w e z são linearmente independentes.

Se os vetores u, v no plano são linearmente independentes então qualquer vetor w nesse plano se escreve, de modo único, como combinação linear $w = s \cdot u + t \cdot v$ de u e v.

Demonstraremos esta proposição de duas maneiras diferentes: uma geométrica e outra algébrica.

A demonstração geométrica começa representando os vetores $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$ por segmentos orientados com o mesmo ponto inicial A. Como

u e v não são colineares, os eixos AB e AC têm apenas o ponto A em comum.

Dado um vetor qualquer w no plano, escrevemos $w = \overrightarrow{AP}$ e, pelo ponto P, traçamos paralelas aos eixos AB e AC. A primeira corta o eixo AC no ponto C' e a segunda corta AB no ponto B'.

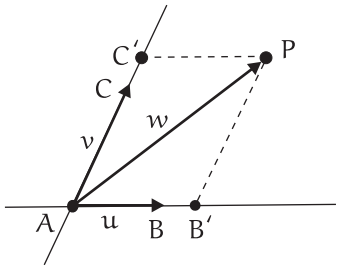


Figura 15.5 - Escrevendo w como soma de um múltiplo de u com um múltiplo de v.

Como A, B e B' são colineares, existe (um único) $s \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AB'} = s \cdot \overrightarrow{AB}$.

Analogamente, $\overrightarrow{AC'} = t \cdot \overrightarrow{AC}$ com $t \in \mathbb{R}$.

Como AP é diagonal do paralelogramo $AB'PC'$, temos $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$, ou seja, $w = s \cdot u + t \cdot v$.

A demonstração algébrica se faz introduzindo no plano um sistema de coordenadas, relativamente ao qual se tem $u = (\alpha, \beta)$ e $v = (\alpha', \beta')$. Dado um vetor arbitrário $w = (\gamma, \delta)$, procuram-se números reais s, t tais que $w = s \cdot u + t \cdot v$.
Esta igualdade vetorial equivale às duas igualdades numéricas

$$\begin{aligned} \alpha s + \alpha' t &= \gamma \\ \beta s + \beta' t &= \delta. \end{aligned}$$

Como u e v são L.I., temos $\alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0$, logo este sistema possui uma única solução (s, t), para a qual vale $w = s \cdot u + t \cdot v$.

Exemplo 15.1 Qualquer vetor do plano se exprime como combinação linear dos vetores $u = (2, -1)$ e $v = (-3, 2)$. Se quisermos, por exemplo, escrever o vetor $w = (1, 1)$ como uma combinação linear $w = su + tv$,

devemos ter

$$\begin{aligned}(1,1) &= s\cdot(2,-1)+t\cdot(-3,2)=(2s,-s)+(-3t,2t)=\\ &=(2s-3t,-s+2t),\end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{aligned}2s-3t&=1\\ -s+2t&=1.\end{aligned}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $s=5$, $t=3$. Portanto, $w=5u+3v$ é a expressão do vetor w como combinação linear de u e v.

Usaremos a notação $|v|$ para indicar o *comprimento* do vetor v. Se $v=\overrightarrow{AA'}$ então $|v|=d(A,A')=$ comprimento do segmento de reta AA'. Num determinado sistema de coordenadas, se $v=(\alpha,\beta)$ então

$$|v|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Se $|v|=1$, o vetor v chama-se *unitário*.

O *produto interno* dos vetores não-nulos v,w é, por definição, o número

$$\langle v,w\rangle=|v|\,|w|\cos\theta,$$

onde θ é o ângulo entre v e w. Se $v=0$ ou $w=0$, então não faz sentido falar no ângulo entre v e w. Neste caso, põe-se $\langle v,w\rangle=0$, por definição.

Vê-se que $\langle v,w\rangle>0$ quando o ângulo entre v e w é agudo, $\langle v,w\rangle=0$ quando v e w são ortogonais (perpendiculares) e $\langle v,w\rangle<0$ quando o ângulo entre v e w é obtuso.

Tem-se ainda $\langle v,v\rangle=|v|^2=$ quadrado do comprimento do vetor v. Logo o comprimento de v é $|v|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$.

Sejam v e w vetores não-nulos.

Se fixarmos um sistema de coordenadas de origem O e pusermos $v=\overrightarrow{OA}$ e $w=\overrightarrow{OB}$, com $A=(\alpha,\beta)$ e $B=(\gamma,\delta)$, sabemos que o cosseno do ângulo θ entre os segmentos OA e OB é dado por

$$\cos\theta=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{|v|\,|w|}.$$

Daí resulta que $\alpha\gamma+\beta\delta=|v|\,|w|\cos\theta$, ou seja, que

$$\langle v,w\rangle=\alpha\gamma+\beta\delta.$$

Esta fórmula vale obviamente quando um dos vetores v ou w é igual a zero. Assim, em qualquer caso, obtemos uma expressão do produto interno $\langle v, w\rangle$ em função das coordenadas dos vetores v e w. Observe-se que, variando o sistema, as coordenadas de v e w mudam mas a expressão $\alpha\gamma + \beta\delta$ se mantém invariante, pois é igual a $|v|\,|w|\cos\theta$ e este valor nada tem a ver com coordenadas.

Sabendo que $\langle v, w\rangle = \alpha\gamma + \beta\delta$ quando $v = (\alpha, \beta)$ e $w = (\gamma, \delta)$, prova-se sem dificuldade cada uma das igualdades abaixo, válidas para vetores arbitrários u, v, w e qualquer número real α:

$$\begin{aligned}
&\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle;\\
&\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle;\\
&\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle;\\
&\langle \alpha v, w\rangle = \langle v, \alpha w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle.
\end{aligned}$$

O uso de vetores permite apresentar a equação paramétrica da reta sem recorrer a um sistema de coordenadas. Com efeito, a reta que passa pelos pontos A e B é o conjunto dos pontos

$$P = A + tv, t \in \mathbb{R}, v = \overrightarrow{AB}\,.$$

Como sabemos, $P = A + tv$ significa que $tv = \overrightarrow{AP}$, ou seja, que $\overrightarrow{AP} = t\cdot\overrightarrow{AB}$.

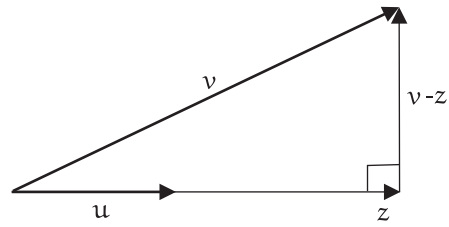


Figura 15.6 - A projeção ortogonal z, de v sobre u.

O produto interno de dois vetores permite exprimir de forma elegante, em termos das coordenadas de u e v (isto é, sem Trigonometria), a projeção ortogonal de um vetor v sobre o vetor não-nulo u.

Chama-se *projeção ortogonal* do vetor v sobre o vetor não-nulo u ao vetor z, múltiplo de u, tal que $v - z$ é ortogonal a u.

Seja $z = tu$ $(t \in \mathbb{R})$ a projeção ortogonal de v sobre o vetor não-nulo u. Temos, sucessivamente:

$$\langle v - z, u\rangle = 0, \quad \langle v - tu, u\rangle = 0, \quad \langle v, u\rangle = t\langle u, u\rangle,$$

logo

$$t = \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}, \quad \text{e assim} \quad z = \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u.$$

Exemplo 15.2 Se os vetores não-nulos u e v são ortogonais (isto é, $\langle u, v\rangle = 0$) então eles são L.I.. Neste caso, dada a expressão $w = su + tv$ do vetor w como combinação linear de u e v, tomamos o produto interno de ambos os membros desta igualdade por u e por v, sucessivamente e obtemos as relações:

$$\langle w, u\rangle = s\langle u, u\rangle, \quad \langle w, v\rangle = t\langle v, v\rangle.$$

donde

$$s = \frac{\langle w, u\rangle}{\langle u, u\rangle} \quad \text{e} \quad t = \frac{\langle w, v\rangle}{\langle v, v\rangle}.$$

Em particular, se u e v além de ortogonais forem vetores unitários, tem-se $\langle u, u\rangle = \langle v, v\rangle = 1$ logo $s = \langle w, u\rangle$ e $t = \langle w, v\rangle$. Portanto, se u e v são vetores unitários ortogonais então, para todo vetor w no plano de u e v se tem

$$w = \langle w, u\rangle u + \langle w, v\rangle v.$$

Exercícios

1. Dados os vetores u e v, prove que as afirmações seguintes são equivalentes:

a) Uma combinação linear $\alpha u + \beta v$ só pode ser igual a zero quando $\alpha = \beta = 0$.

b) Se $\alpha u + \beta v = \alpha' u + \beta' v$ então $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$.

c) Nenhum dos vetores u e v é múltiplo do outro.

d) Se $u = (\alpha, \beta)$ e $v = (\alpha', \beta')$ então $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$.

e) Todo vetor do plano é combinação linear de u e v. [Neste exercício, devem ser provadas as implicações a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ a)]

2. Exprima o vetor $w = (1,1)$ como combinação linear de $u = (-2,1)$ e $v = (1,-1)$.

3. Prove que a soma dos vetores com origem no centro de um polígono regular e extremidade nos vértices desse polígono é igual a zero.

4. Seja ABCD um quadrilátero. Se E é o ponto médio do lado AB e F é o ponto médio do lado oposto DC, prove que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

5. Seja G o baricentro (ponto de encontro das medianas) do triângulo ABC. Prove que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$.

6. Sejam u, v, w vetores tais que v é múltiplo de u mas w não é. Se $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, prove que $\gamma = 0$ e $\alpha u + \beta v = 0$.

7. Seja P um ponto interior ao triângulo ABC tal que $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$. Prove que as retas AP, BP e CP são medianas de ABC, logo P é o baricentro desse triângulo.

8. Dados os vetores arbitrários u e v, mostre que $|u| \cdot v$ e $|v| \cdot u$ são vetores do mesmo comprimento.

9. Mostre que se os vetores u e v têm o mesmo comprimento então $u + v$ e $u - v$ são ortogonais. E a recíproca?

10. Sejam $u = \overrightarrow{OP}, v = \overrightarrow{OQ}$ vetores não-nulos tais que $|u|v + |v|u = \overrightarrow{OR}$ também seja diferente de zero. Prove que OR é a bissetriz do ângulo $P\widehat{O}Q$. Obtenha, a partir daí, a inclinação dessa bissetriz em função das coordenadas dos pontos P e Q num sistema de eixos ortogonais arbitrário OXY.

11. Dado o paralelogramo ABDC, ponha $\overrightarrow{AB} = u$ e $\overrightarrow{AC} = v$, logo $\overrightarrow{AD} = u + v$ e $\overrightarrow{BC} = v - u$. Prove que $|u - v|^2 + |u + v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$ e conclua que em todo paralelogramo a soma dos quadrados das diagonais é igual à soma dos quadrados dos quatro lados.

12. Logo em seguida à definição do produto interno de dois vetores foi feita uma lista de seis propriedades que resultam imediatamente da definição dada. Quais dessas seis propriedades se manteriam ainda válidas se o produto interno de u por v fosse definido como igual a $|u| \cdot |v|$?

13. Prove as seguintes propriedades do comprimento (ou *norma*) de um vetor:

a) $|v| = 0$ se, e somente se, $v = 0$.

b) $|v + w| \leq |v| + |w|$.

c) $|\lambda \cdot v| = |\lambda||v|$.

d) $|-v| = |v|$.

14. Prove que $\langle u, v \rangle = \pm|u||v|$ se, e somente se, um dos vetores u, v é múltiplo do outro. Em seguida, compare $|u + v|^2 = \langle u + v, u + v \rangle$ com $(|u| + |v|)^2$ para concluir que $|u + v| = |u| + |v|$ se, e somente se, um dos vetores u, v é zero ou é um múltiplo positivo do outro.

15. Indicando genericamente por v^* o vetor obtido de v por rotação positiva de $90°$, prove que $(\alpha u + \beta v)^* = \alpha u^* + \beta v^*$ e $\langle u, v^*\rangle + \langle u^*, v\rangle = 0$ para quaisquer vetores u, v do plano e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

16. Fixando uma reta r, indiquemos com v' a projeção ortogonal de um vetor arbitrário v sobre r. Prove as seguintes propriedades:

a) $(v + w)' = v' + w'$

b) $(v')' = v'$

c) $\langle v, w'\rangle = \langle v', w\rangle$

17. Suponha dada uma correspondência que associa a cada vetor v do plano um vetor v' com as propriedades a), b), c) do exercício anterior. Prove que só há 3 possibilidades: ou $v' = 0$ para todo v, ou $v' = v$ para todo v ou existe uma reta r tal que, para todo v, v' é a projeção ortogonal de v sobre r.

18. Sejam r e s duas retas concorrentes do plano. Se as projeções ortogonais dos vetores u e v sobre essas retas são iguais, prove que $u = v$.

19. Sejam A, B e C pontos do plano. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle = |\overrightarrow{AB}|^2$

b) As retas AB e BC são perpendiculares.

Conclua que se B é o pé da perpendicular baixada de A sobre a reta r então o produto interno $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle$ independe do ponto C tomado sobre r.

20. Dados quatro pontos quaisquer A, B, C e D no plano, ponha $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{BC}$, $w = \overrightarrow{CD}$, portanto $u + v = AC, v + w = \overrightarrow{BD}$ e $u + v + w = \overrightarrow{AD}$. Conclua então que

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}\rangle + \langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\rangle = 0$$

Suponhamos, em seguida, que D seja o ponto de encontro das alturas do triângulo ABC que partem dos vértices B e C, de modo que $AB \perp CD$ e $AC \perp DB$. Deduza que AD é perpendicular a BC e conclua daí que as três alturas do triângulo ABC se encontram no mesmo ponto D.

21. Seja $0 \leq t \leq 1$. Sabemos que $C = A + t \cdot \overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow C \in AB$. Mostre que, neste caso, tem-se $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = (1-t)\,\overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{OB}$ qualquer que seja o ponto O do plano.

22. Se $\alpha A + \beta B = C$ e $\alpha A_1 + \beta B_1 = C_1$, com $\alpha + \beta = 1$, prove que se tem $\alpha \cdot \overrightarrow{AA_1} + \beta \cdot \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$.

23. Um subconjunto X do plano chama-se *convexo* quando o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de X está contido em X.

Prove: O *disco* D de centro num ponto A e raio r é um conjunto convexo. (Por definição, D é formado pelos pontos P tais que $|\overrightarrow{AP}| \leq r$.)

24. A interseção $X \cap Y$ de dois conjuntos convexos X e Y é um conjunto convexo.

25. Seja X convexo. Se $x, y, z \in X$ e α, β, γ são números ≥ 0 com $\alpha + \beta + \gamma = 1$ então $\alpha x + \beta y + \gamma z \in X$.

26. Se X e Y são convexos então a reunião dos segmentos de reta que ligam um ponto qualquer de X a um ponto qualquer de Y é um conjunto convexo.

27. Dados a, b não simultaneamente iguais a zero, e c qualquer, o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $ax + by \geq c$ é convexo.

28. O conjunto Z dos pontos cujas coordenadas (x, y) cumprem as condições $x > 0$ e $y \geq 1/x$ é convexo.

29. O conjunto W dos pontos cujas coordenadas (x, y) cumprem $y \geq x^2$ é convexo.

30. Dados os vetores u, v, com $u \neq 0$, prove que o vetor $w = v - \dfrac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle} \cdot u$ é perpendicular a u.

31. Sejam u, v vetores não-colineares. Se um vetor w é tal que $\langle w, u\rangle = 0$ e $\langle w, v\rangle = 0$, mostre que $w = 0$.

16

Equação da Elipse

Uma *elipse* de focos F e F' é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F e F' é igual a uma constante, que indicaremos com $2a$. Portanto, P pertence à elipse se, e somente se,

$$d(P,F) + d(P,F') = 2a.$$

Mostraremos a seguir que, se escolhermos convenientemente o sistema de eixos, a elipse pode ser representada por uma equação bastante simples.

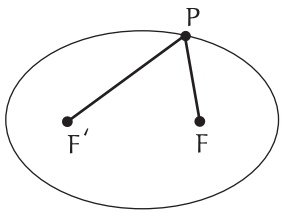


Figura 16.1 - Uma elipse de focos F e F'.

Dada a elipse E, tomamos no plano um sistema de coordenadas tal que $F = (c, 0)$ e $F' = (-c, 0), c \geq 0$, sejam as coordenadas dos focos. Observe que $c < a$ pois, no triângulo PFF', o lado $\overline{FF'}(= 2c)$ é menor do que a soma $\overline{PF} + \overline{PF'}(= 2a)$. (Se fosse $c = a$ a elipse se reduziria ao segmento FF'.)

De acordo com a definição, o ponto P pertence à elipse se, e somente se,

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a, \quad \text{ou seja} \tag{16.1}$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}. \tag{16.2}$$

Elevando ambos os membros desta equação ao quadrado, obtemos:

$$(x-c)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{16.3}$$

ou, simplificando:

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx. \tag{16.4}$$

Tomando novamente o quadrado de ambos os membros, vem:

$$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)=a^4+2a^2cx+c^2x^2, \tag{16.5}$$

logo

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \tag{16.6}$$

Pondo $a^2-c^2=b^2$, esta equação se escreve:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \tag{16.7}$$

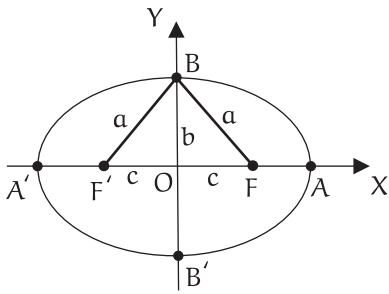


Figura 16.2 - Vértices e eixos de uma elipse.

Dividindo ambos os membros por a^2b^2 resulta

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{16.8}$$

Resumindo: se tomarmos um sistema de coordenadas tal que os focos F e F' estão sobre o eixo OX e a origem O é o ponto médio do segmento FF', então as coordenadas de um ponto qualquer $P = (x, y)$ da elipse satisfazem a equação (16.8), na qual $a = \frac{1}{2}[d(P,F) + d(P,F')]$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, sendo $2c = d(F,F')$ a distância focal.

Os pontos $A = (a, 0), A' = (-a, 0), B = (0, b)$ e $B' = (0, -b)$ pertencem à elipse; eles são chamados os *vértices*. Os segmentos AA' e BB' chamam-se os *eixos*. O eixo AA', que contém os focos, é o *eixo maior* e BB' é o *eixo menor*. (Note que, sendo $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se $a \geq b$, onde $d(A, A') = 2a$ e $d(B, B') = 2b$.)

Observação 16.1 A rigor, provamos acima apenas que as coordenadas (x, y) de um ponto arbitrário da elipse satisfazem a equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Resta verificar que, reciprocamente, todo ponto cujas coordenadas satisfazem esta equação pertence à elipse cujos focos são $F = (c, 0)$ e $F' = (-c, 0)$, onde $c \geq 0$ é tal que $a^2 = b^2 + c^2$, ou seja, que a equação (16.8) acima implica (16.1). Isto se faz mostrando que cada passo da dedução acima pode ser revertido, partindo-se de (16.8) até chegar a (16.1). A única dificuldade aparente está em reverter as elevações ao quadrado (16.4) $\Rightarrow$ (16.5) $\Rightarrow$ e (16.2) $\Rightarrow$ (16.3), pois de $A^2 = B^2$ pode-se concluir apenas que $A = \pm B$ mas não necessariamente que $A = B$, a menos que se saiba, a priori, que A e B, são ambos ≥ 0. Como os primeiros membros de (16.2) e (16.4) são obviamente ≥ 0, temos que verificar que a validez de (16.8) obriga a serem

$$a^2 + cx \geq 0 \quad \text{e} \quad 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \geq 0.$$

Ora, a equação (16.8), com $a \geq b > 0$, obriga $|x| \leq a$. Como $a^2 = b^2 + c^2$, temos também $0 \leq c < a$. Portanto $a^2 + cx > 0$. Isto garante que (16.5) $\Rightarrow$(16.4).

Além disso, a equação (16.8) também nos dá $y^2 \leq b^2$, logo $-b^2 + y^2 \leq 0$ e daí

$$(x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \leq a^2 + 2a^2 + a^2 - b^2 + y^2 \leq 4a^2.$$

Portanto $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \leq 2a$, donde $2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \geq 0$.

Isto completa a prova de que $P = (x, y)$ pertence à elipse E, se e somente se $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Note ainda que estamos admitindo a possibilidade de termos $c = 0$, isto é, $F = F'$, caso em que a elipse se reduz a uma circunferência (elipse com dois eixos de mesmo tamanho).

Exemplo 16.1 A figura de uma elipse nos dá a impressão de um círculo achatado. Esta impressão é correta, num sentido bem preciso. Dado o número real c, com $0 < c < 1$, podemos pensar no processo de achatamento vertical em $\mathbb{R}^2$, que consiste em levar cada ponto (x, y) para a posição (x', y') em que $x' = x$ e $y' = cy$, de modo que as distâncias verticais ficam reduzidas pelo fator c.

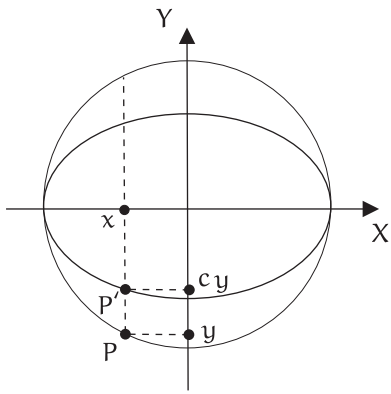


Figura 16.3 - Quando $P = (x,y)$ descreve uma circunferência, o ponto $P' = (x,cy)$ descreve uma elipse.

Se tomarmos o fator de redução $c = b/a$, onde $0 < b < a$, a circunferência $\Gamma : x^2 + y^2 = a^2$, após o processo de achatamento que acabamos de descrever, se transforma na elipse de equação $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. Noutras palavras, tem-se $x^2 + y^2 = a^2$ se, e somente se,

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1,$$

onde $x' = x$ e $y' = \dfrac{b}{a}y$. Com efeito, temos $y/a = y'/b$, logo

$$x^2 + y^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Exemplo 16.2 A equação $6x^2 + 10y^2 = 15$ representa uma elipse, pois equivale a $\dfrac{x^2}{5/2} + \dfrac{y^2}{3/2} = 1$ ou seja,

$$\frac{x^2}{(\sqrt{5/2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3/2})^2} = 1.$$

O eixo maior dessa elipse é o segmento AA', onde $A = (\sqrt{5/2}, 0)$ e $A' = (-\sqrt{5/2}, 0)$. O eixo menor é o segmento BB', com $B = (0, \sqrt{3/2})$ e $B' = (0, -\sqrt{3/2})$. Aqui, $a^2 = 5/2$ e $b^2 = 3/2$ logo $c^2 = a^2 - b^2 = 1$. Portanto os focos da elipse são os pontos $F' = (-1, 0)$ e $F = (1, 0)$

Exercícios

1. Prove que se $a > b$ então a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ está contida no disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ e no retângulo $|x| \leq a, |y| \leq b$, cujos vértices são os 4 pontos $(\pm a, \pm b)$. Prove também que todo ponto do disco $x^2 + y^2 \leq b^2$ cumpre $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$. Mostre que $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$ são, respectivamente, os pontos da elipse mais afastados e mais próximos da origem.

2. Seguindo os mesmos passos da dedução da equação da elipse de focos F e F' mostre que o ponto $P = (x, y)$ cumpre a condição $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1$ se, e somente se, $d(P, F) + d(P, F') < 2a$. Conseqüentemente, $d(P, F) + d(P, F') > 2a$ se, e somente se, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} > 1$. No primeiro caso, diz-se que P é um ponto *interior* e, no segundo, *exterior* à elipse.

3. Seja $P = (x_1, y_1)$ um ponto da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Prove que a reta cuja equação é $\dfrac{x_1}{a^2} \cdot x + \dfrac{y_1}{b^2} \cdot y = 1$ tem apenas o ponto P em comum com a elipse. Por isso, ela é chamada a *tangente* à elipse no ponto P.

4. Seja r a reta tangente no ponto $P = (x_1, y_1)$ à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Se $Q = (\overline{x}, \overline{y})$ é um ponto de r diferente de P, mostre que se tem $\dfrac{\overline{x}^2}{a^2} + \dfrac{\overline{y}^2}{b^2} > 1$ e conclua que $d(Q, F) + d(Q, F') > 2a$, onde F e F' são os focos da elipse.

5. Sejam F e F' pontos não pertencentes a uma reta r. Usando Geometria Elementar, prove que existe um único ponto P em r que torna a soma $d(F, P) + d(P, F')$ mínima. Ele é tal que os segmentos de reta PF e PF' formam ângulos iguais com a reta r. Conclua que se a reta r é tangente no ponto P à elipse de focos F e F' então os segmentos PF e PF' fazem ângulos iguais com r.

6. Prove que, dados $a > 0$ e $b > 0$, quando t varia de 0 a 2π o ponto $P = (a\cos t, b \text{ sen } t)$ descreve uma elipse.

7. Vimos no final da Seção 16 que a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ é a imagem da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ pela transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (x, cy)$, onde $c = b/a$. Prove:

a) T transforma qualquer reta $mx + ny = p$ numa reta de equação $mx + \dfrac{n}{c}y = p$.

b) T transforma retas paralelas em retas paralelas.

c) T transforma todo conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^2$ num conjunto convexo $T(C)$.

8. O segmento de reta que une dois pontos de uma elipse chama-se uma *corda*. Use a transformação T do exercício anterior para provar que se PQ é uma corda da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, os pontos médios das cordas paralelas a PQ estão sobre uma reta que passa pela origem.

9. Use a transformação $T(x, y) = (x, cy), c = b/a$, juntamente com o fato de que o disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ é convexo, para mostrar que o "disco elíptico" $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ é um conjunto convexo.

10. Quais são as tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 32$ que têm inclinação igual a $1/2$?

11. Os eixos de uma elipse medem $2a$ e $2b$ e estão situados sobre os eixos OX e OY. Suponha que a equação $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente essa elipse. Mostre que existe $k \neq 0$ tal que $A = k/a^2, C = k/b^2, F = -k$ e $B = D = E = 0$.

12. A cada ponto $P = (x, y)$ associemos o ponto $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y})$, com $\overline{x} = x/a, \overline{y} = y/b$, onde a e b são constantes não-nulas. Quando P descreve a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2$, mostre que $\overline{P}$ descreve a circunferência $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = 1$. Mostre também que quando o ponto $Q = (x, y)$ percorre a tangente à elipse no ponto (x_1, y_1), seu correspondente $\overline{Q} = (\overline{x}, \overline{y})$ percorre a tangente à circunferência no ponto $(x_1/a, y_1/b)$. Use a equação desta última tangente para concluir que a tangente à elipse pelo ponto (x_1, y_1) tem a equação $(x_1/a^2)x + (y_1/b^2)y = 1$.

13. Numa circunferência, o raio perpendicular a uma corda passa pelo ponto médio dessa corda. Use este fato e o método do exercício anterior para mostrar que a reta que liga o centro da elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ ao ponto (x_1, y_1) dessa elipse divide ao meio todas as cordas paralelas à tangente à elipse pelo ponto (x_1, y_1). A partir daí, obtenha um processo para traçar as duas tangentes a uma elipse dada, paralelas a uma reta dada.

17

Equação da Hipérbole

Sejam F e F' dois pontos do plano e a um número real positivo. Chama-se *hipérbole* de focos F e F' ao conjunto dos pontos P do plano cuja diferença das distâncias aos pontos F e F' é, em valor absoluto, igual a $2a$. Assim, o ponto P pertence a essa hipérbole H se, e somente se

$$|d(P,F') - d(P,F)| = 2a.$$

A hipérbole H possui dois ramos, um formado pelos pontos P para os quais a diferença $d(P,F) - d(P,F')$ é positiva, igual a $2a$, e outro pelos pontos em que esta diferença é negativa, igual a $-2a$.

Para obter a equação da hipérbole em sua forma mais simples, tomamos no plano um sistema de eixos ortogonais relativamente aos quais as coordenadas dos focos sejam $F = (c, 0)$ e $F' = (-c, 0)$, com $c > 0$.

Se $d(P,F') - d(P,F) = 2a$, diremos que o ponto P está no *ramo direito* da hipérbole.

Quando $d(P,F') - d(P,F) = -2a$, diz-se que P pertence ao ramo *esquerdo* de H. No sistema de coordenadas que acabamos de escolher, se $P = (x, y)$ está no ramo direto de H, o ponto $P' = (-x, y)$, simétrico de P relativamente ao eixo OY, está no ramo esquerdo, e vice-versa. Portanto os dois ramos da hipérbole são linhas simétricas em relação ao eixo OY.

A fim de determinar a equação do ramo direito da hipérbole, escrevemos a equação $d(P,F') = d(P,F) + 2a$ em termos de coordenadas, o que nos dá

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a.$$

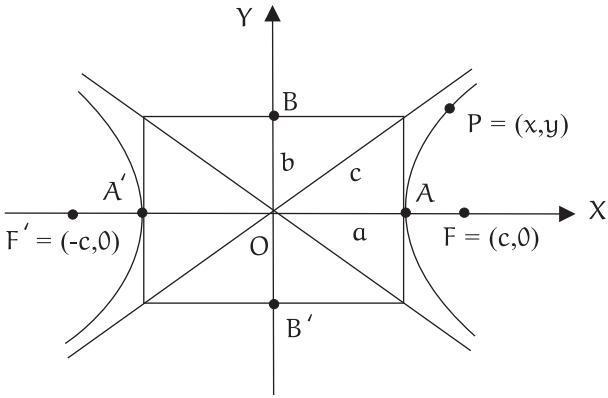


Figura 17.1 - Uma hipérbole. Tem-se $|d(P,F') - d(P,F)| = 2a$ e $b^2 = c^2 - a^2$. As retas $y = \pm \frac{b}{a} x$ são as assíntotas.

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Simplificando:

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Como, no triângulo PFF', o lado FF' é maior do que a diferença dos outros dois, temos $2c > 2a$, logo $c^2 > a^2$. Assim, a diferença $c^2 - a^2$ é um número positivo, cuja raiz quadrada chamamos de b, de modo que $c^2 - a^2 = b^2$.

Portanto, se o ponto $P = (x, y)$ pertence ao ramo direito da hipérbole, temos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (17.1)$$

Se $P = (x, y)$ estivesse no ramo esquerdo então $Q = (-x, y)$ estaria no ramo direito, de modo que valeria ainda a igualdade acima.

Portanto a equação (17.1) é satisfeita pelas coordenadas de todos os pontos $P = (x, y)$ pertencentes à hipérbole.

Reciprocamente, seja $P = (x, y)$ um ponto cujas coordenadas satisfazem a equação (17.1). Suponhamos inicialmente que x seja positivo. Vamos reverter cada passo da dedução feita acima e concluir que P pertence ao ramo direito da hipérbole. Para fazer essas reversões, precisamos apenas verificar que, nas duas vezes em que elevamos ao quadrado ambos os membros de uma igualdade, esses dois membros eram positivos. Isto era óbvio na primeira vez. Quando à segunda, basta observar que a equação (17.1) implica $x \geq a$. Como já sabemos que $c > a$, segue-se que $cx - a^2 > 0$.

Caso seja $x < 0$, o ponto $Q = (-x, y)$ tem abcissa positiva e suas coordenadas também satisfazem a equação (17.1), logo Q pertence ao ramo direito da hipérbole, portanto $P = (x, y)$ está no ramo esquerdo. Isto conclui a verificação de que a equação (17.1) representa uma hipérbole. [Não é necessário considerar o caso $x = 0$ porque $(0, y)$ não pode satisfazer a equação (17.1).]

A hipérbole corta o eixo OX nos pontos $A = (a, 0)$ e $A' = (-a, 0)$ que são chamados os *vértices* da hipérbole. O segmento de reta AA' chama-se *o eixo* enquanto o segmento BB', com $B = (0, b)$ e $B' = (0, -b)$, chama-se *o eixo conjugado* da hipérbole. Os pontos B e B' não pertencem à hipérbole. As retas $y = \dfrac{b}{a}x$ e $y = -\dfrac{b}{a}x$ chamam-se as da hipérbole. Para valores muito grandes de $|x|$ a hipérbole torna-se quase indistinguível de suas assíntotas.

Exemplo 17.1 Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ a função definida por $f(x) = 1/x$. O gráfico de f é o conjunto $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y = 1/x\}$. Afirmamos que G é um ramo de hipérbole. Para provar este fato, vamos introduzir no plano um novo sistema de coordenadas com a mesma origem e com eixos formando ângulos de 45° com os eixos antigos. Chamemos de (s, t) as coordenadas de um ponto nesses novos eixos. A fim de obter a equação da curva G em termos de s e t, precisamos exprimir x e y em função das novas coordenadas. Começamos lembrando que, se num triângulo retângulo os ângulos agudos medem 45°, cada cateto é igual a $\sqrt{2}/2$ vezes a hipotenusa. Fica então claro a partir da Figura 17.2 que se um ponto P tem coordenadas (x, y) no sistema antigo e (s, t) no novo

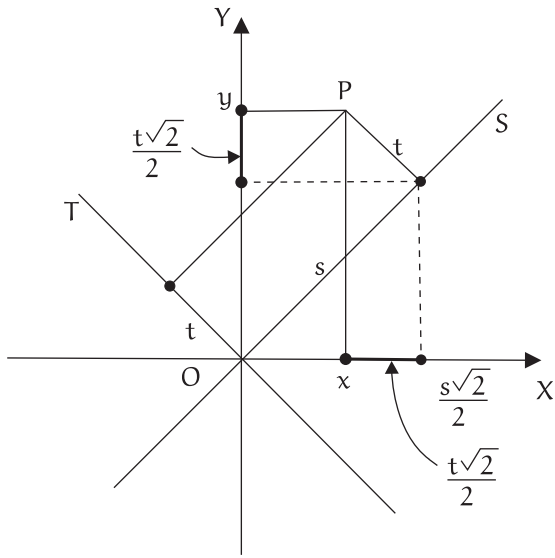


Figura 17.2 - Se o ângulo de OX para OS mede 45° então $x = \frac{s\sqrt{2}}{2} - \frac{t\sqrt{2}}{2}$ e $y = \frac{s\sqrt{2}}{2} + \frac{t\sqrt{2}}{2}$.

então

$$x = s\frac{\sqrt{2}}{2} - t\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad y = s\frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Além disso, se $x > 0$ e $y > 0$ então $s > 0$.

Portanto, as seguintes afirmações são equivalentes:

1) $P = (x, y) \in G$;

2) $x > 0$ e $xy = 1$;

3) $s > 0$ e $\left(s\frac{\sqrt{2}}{2} - t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(s\frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$;

4) $s > 0$ e $s^2/2 - t^2/2 = 1$;

5) $s > 0$ e $\frac{s^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2} = 1$, com $a = b = \sqrt{2}$;

6) P pertence ao ramo direito de uma hipérbole cujo eixo é a reta $y = x$.

Logo G é um ramo de hipérbole.

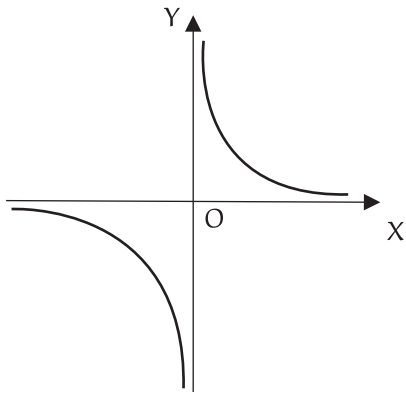


Figura 17.3 - A hipérbole $xy = 1$. Suas assíntotas são os eixos OX e OY.

Exemplo 17.2 A equação $6x^2 - 10y^2 = 15$ equivale a

$$\frac{x^2}{(\sqrt{5/2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{3/2})^2} = 1,$$

logo representa uma hipérbole cujos eixos AA' e BB' são determinados por $A = (\sqrt{5/2}, 0)$, $A' = (-\sqrt{5/2}, 0)$, $B = (0, \sqrt{3/2})$ e $B' = (0, -\sqrt{3/2})$. Como $a^2 = 5/2$ e $b^2 = 3/2$, temos $c^2 = a^2 + b^2 = 4$, logo $c = 2$. Assim, os focos desta hipérbole são os pontos $F = (2, 0)$ e $F' = (-2, 0)$.

Exercícios

1. Dado arbitrariamente $R > 0$, ache um ponto (x, y) na hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tal que $x^2 + y^2 > R$. Conclua que toda hipérbole é um conjunto *ilimitado*, isto é, não pode estar contida num disco de centro O.

2. Para todo ponto $P = (m, n)$ na hipérbole $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, mostre que a reta $r : \frac{m}{a^2}x - \frac{n}{b^2}y = 1$ tem apenas o ponto P em comum com H. A reta r chama-se a *tangente* a H no ponto P.

3. Quais são as coordenadas dos focos da hipérbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$?

4. Segundo a Geometria Elementar, se D é um ponto do lado BC no triângulo ABC então a reta AD é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ se, e somente se, $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$. Use este fato para mostrar que a tangente à hipérbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ no ponto $P = (3\sqrt{5}, 4)$ é a bissetriz do ângulo $F\widehat{P}F'$, onde F e F' são os focos da hipérbole.
(*Observação:* Em qualquer hipérbole de focos F e F', a tangente num ponto P é a bissetriz do ângulo $F\widehat{P}F'$.)

5. Quais são as coordenadas dos focos da hipérbole $xy = 1$?

6. Prove que, para todo $m \neq 0$, a reta $\frac{1}{m}x + my = 2$ tem o único ponto $P = (m, 1/m)$ em comum com a hipérbole $xy = 1$ logo é a tangente a essa hipérbole no ponto P.

7. Lembrando que $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$, mostre que $x - \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$ e use este fato para concluir que, atribuindo a x valores muito grandes em módulo, o ponto $(x, \frac{b}{a}x)$ na assíntota da hipérbole $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ torna-se tão próximo quando se queira do ponto de H com mesma abcissa x e mesmo sinal de ordenada. (Noutros termos: quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, a hipérbole se aproxima arbitrariamente de suas assíntotas.)

8. Prove que a tangente à hipérbole $xy = 1$ no ponto $P = (5, 1/5)$ é a bissetriz do ângulo $F\widehat{P}F'$, onde F e F' são os focos.

9. Mostre que $x = \frac{a}{\cos t}, y = \frac{b \sin t}{\cos t}$ são equações paramétricas de uma hipérbole. Qual é o domínio da variável t e quais são os focos dessa hipérbole?

10. Dados A, C e F, números positivos, considere as equações $\pm Ax^2 \pm Cy^2 = \pm F$. Escolhendo os sinais $+$ e $-$ das oito maneiras possíveis, mostre que em cada caso se obtém uma elipse, uma hipérbole ou o conjunto vazio. Nos casos de elipse, determine os vértices e focos; nos casos de hipérbole, ache os focos e as assíntotas.

11. No exercício anterior, quando é que as elipses se reduzem a circunferências?

12. Cada uma das equações a seguir representa o conjunto vazio, um ponto, uma reta, um par de retas paralelas ou um par de retas que se cortam na origem. Decida cada situação e determine as retas, se for o caso.

a) $3x^2 - 5y^2 = 0$;
b) $3x^2 = 1$;
c) $5y^2 = -1$;
d) $3x^2 + 5y^2 = 0$;
e) $5y^2 = 0$

13. O eixo de uma hipérbole mede 6 e seus focos, situados sobre o eixo OY, são $F' = (0, -4)$ e $F = (0, 4)$. Qual é a equação dessa hipérbole?

18

Equação da Parábola

Sejam d uma reta e F um ponto fora dela. No plano determinado por d e F, chama-se *parábola* de *foco* F e *diretriz* d ao conjunto dos pontos equidistantes de d e F.

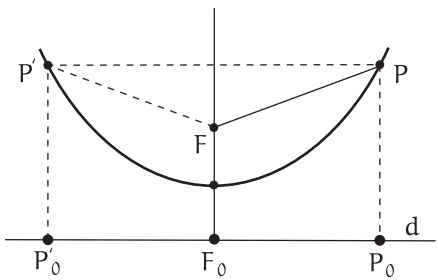


Figura 18.1 - P pertence à parábola de foco F e diretriz d porque d(P,F)=d(P,P_0) com $PP_0 \perp d$. A perpendicular FF_0, baixada do foco sobre a diretriz, é um eixo de simetria.

Lembramos que a distância do ponto P à reta d é a distância de P ao ponto P_0, pé da perpendicular baixada de P sobre d. Se F_0 é o pé da perpendicular baixada de F sobre d, a reta FF_0 é um eixo de simetria da parábola: se P está sobre a parábola e P' é o seu simétrico em relação à reta FF_0 então P' também pertence à parábola, como se vê pela Figura 18.1.

Sejam p o comprimento e A o ponto médio do segmento FF_0. A distância de A à reta d é igual a $\mathsf{p}/2$, o mesmo que o comprimento de AF. Logo A pertence à parábola e chama-se o seu *vértice*. Qualquer

outro ponto P da parábola está a uma distância de d superior a $p/2$.

Com efeito, chamemos de P_0 o pé da perpendicular baixada de P sobre d. Como a oblíqua FP_0 é maior do que a perpendicular FF_0, temos

$$p < \overline{FP}_0 < \overline{FP} + \overline{PP}_0 = 2\overline{PP}_0.$$

Como $\overline{PP}_0$ é igual à distância de P à reta d, concluímos que essa distância é maior do que $p/2$.

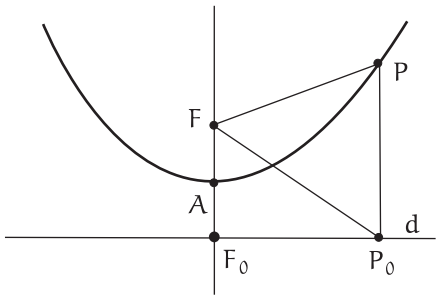


Figura 18.2 - O vértice A é o ponto da parábola mais próximo da diretriz d.

Em seguida, vamos deduzir a equação da parábola de foco F e diretriz d, com $p > 0$ representando a distância de F a d.

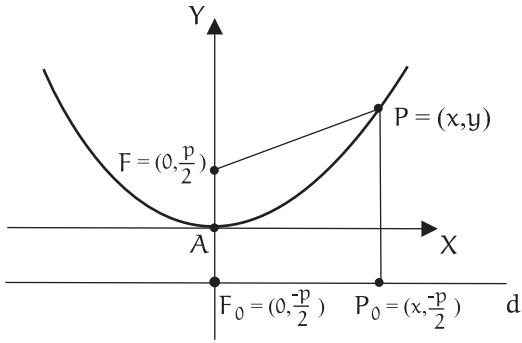


Figura 18.3 - Deduzindo a equação da parábola.

Para isso, tomaremos um sistema de eixos cuja origem é o vértice da parábola e cujo eixo vertical é a reta FF_0, eixo de simetria da parábola.

Neste sistema, temos $F = (0, p/2)$ e a equação da diretriz d é $y = -p/2$. Se $P = (x, y)$ pertence à parábola então $y \geq 0$; na verdade, $y > 0$ salvo quando $P = (0, 0) = A$. Como o eixo vertical é eixo de simetria, se $P = (x, y)$ pertence à parábola então $P' = (-x, y)$ também pertence.

Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da parábola. A distância de P à diretriz d é igual a $y + p/2$, enquanto a distância de P ao foco F é $\sqrt{x^2 + (y - p/2)^2}$. Como P pertence à parábola, devemos ter

$$y + p/2 = \sqrt{x^2 + (y - p/2)^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$(y + p/2)^2 = x^2 + (y - p/2)^2.$$

Desenvolvendo:

$$y^2 + py + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4}.$$

Simplificando: $2py = x^2$ logo $y = x^2/2p$.

Reciprocamente, se as coordenadas do ponto $P = (x, y)$ satisfazem esta equação, com $p > 0$, então $y \geq 0$ logo $y + p/2 \geq 0$ e todos os passos da dedução acima podem ser revertidos, o que mostra que P pertence à parábola de foco $F = (0, p/2)$ e diretriz d, dada pela equação $y = -p/2$.

Parábolas ocorrem freqüentemente como gráficos de funções quadráticas. Uma função quadrática de uma variável tem a forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c constantes, sendo $a \neq 0$. O gráfico de f é o conjunto G, formado pelos pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y = ax^2 + bx + c$.

Para mostrar que G é, de fato, uma parábola, introduziremos novas coordendas s, t mediante uma translação dos eixos, ou seja, tais que $x = s + h$, $y = t + k$, onde h e k serão escolhidos convenientemente. Em termos das novas coordenadas, o ponto $P = (x, y) = (s + h, t + k)$ pertence ao conjunto G se, e somente se,

$$\begin{aligned} t + k &= a(s + h)^2 + b(s + h) + c \\ &= as^2 + (2ah + b)s + (ah^2 + bh + c). \end{aligned}$$

Tomando $h = -b/2a$ e $k = ah^2 + bh + c$, a igualdade acima reduz-se a $t = as^2$.

Assim, em termos das novas coordenadas o ponto (s, t) pertence ao gráfico G se, e somente se, $t = as^2$.

Isto mostra que G é uma parábola, cujo foco é o ponto $(0, 1/4a)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $t = -1/4a$ (nas coordenadas s, t).

Em termos das coordenadas originais x, y, o foco da parábola $y = ax^2 + bx + c$ é o ponto

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$$

e a diretriz é a reta horizontal $y = \dfrac{4ac - b^2 - 1}{4a}$.

Exemplo 18.1 O gráfico da função $f(x) = x^2 - 8x + 15$ é a parábola cujo foco é o ponto $(4, -3/4)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -5/4$.

Exercícios

1. Diz-se que uma reta é tangente a uma parábola quando tem um único ponto em comum com ela e não é paralela ao eixo. Mostre que a reta $y = 7x - 3$ é tangente à parábola $y = x^2 + 3x + 1$ no ponto $(2, 11)$.

2. Determine α e β de modo que a reta $y = \alpha x + \beta$ seja tangente à parábola $y = x^2 - 2x + 5$ no ponto $(-1, 8)$.

3. Seja $P = (m, am^2)$ um ponto da parábola $y = ax^2$. Prove que a única reta não-vertical (portanto não-paralela ao eixo da parábola) que tem apenas o ponto P em comum com essa curva é $y = am^2 + 2am(x - m)$.

4. Determine o foco F e a equação da diretriz da parábola $y = 3x^2$. Dado o ponto $P = (1, 3)$ sobre a curva, seja P_0 sua projeção ortogonal sobre a diretriz. Mostre que a base FP_0 do triângulo isósceles PFP_0 é perpendicular à tangente da parábola em P. Conclua que essa tangente é a bissetriz do ângulo $F\hat{P}P_0$.

5. Prove que a tangente à parábola $y = ax^2$ num ponto P é a bissetriz do ângulo $F\hat{P}P_0$, onde F é o foco e P_0 é a projeção ortogonal de P sobre a diretriz.

6. Determine o foco, o vértice e a equação da diretriz da parábola $y = -2x^2 + 3x - 1$.

7. Dados um ponto F, uma reta Δ que não contém F e um número positivo e, seja X o conjunto dos pontos P do plano tais que $\frac{d(P,F)}{d(P,\Delta)} = e$. Prove:

a) Se $0 < e < 1$ então X é uma elipse.

b) Se $e > 1$ então X é uma hipérbole.

c) Se $e = 1$, então X é uma parábola.

8. Sejam P um ponto da parábola $y = ax^2$ e P' o ponto em que a tangente a essa parábola pelo ponto P corta o eixo $0Y$. Mostre que P e P' são equidistantes do eixo $0X$. A partir daí, obtenha um método gráfico para traçar a tangente por P.

9. Com a notação e o resultado do exercício anterior, chamando de F o foco e P_0 o pé da perpendicular baixada de P sobre a diretriz, mostre que o quadrilátero $PP_0P'F$ é um losango. Conclua que a tangente por P é a bissetriz do ângulo $P_0\hat{P}F$.

10. Uma parábola de eixo vertical passa pelos pontos $A = (-2, 19)$, $B = (3, 4)$ e $C = (5, 26)$.

a) Qual é a equação dessa parábola?

b) Como ficaria a resposta do item a) se a ordenada de C fosse -2 em vez de 26?

19

Mudança de Coordenadas

Em algumas situações é conveniente passar de um sistema de eixos ortogonais OXY para outro sistema $O'X'Y'$ no plano. Nesses casos, é necessário ter fórmulas que exprimam as coordenadas (x', y') de um ponto P no novo sistema $O'X'Y'$ em função das coordenadas (x, y) de P no sistema original OXY.

Começaremos exprimindo as coordenadas de um ponto em termos do produto interno de vetores.

Dado o sistema de eixos ortogonais OXY, sejam $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ os vetores unitários dos eixos OX e OY respectivamente. Dizer que (x, y) são as coordenadas do ponto P no sistema OXY equivale a afirmar que

$$\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2.$$

Tomamos o produto interno de ambos os membros desta igualdade, primeiro por e_1 e depois por e_2, e observando que $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = 1, \langle e_1, e_2\rangle = 0$, obtemos

$$\langle \overrightarrow{OP}, e_1\rangle = x\langle e_1, e_1\rangle + y\langle e_2, e_1\rangle = x \quad \text{e} \quad \langle \overrightarrow{OP}, e_2\rangle = y.$$

Portanto as coordenadas de um ponto P num sistema de eixos ortogonais OXY são os produtos internos do vetor $\overrightarrow{OP}$ pelos vetores unitários dos eixos:

$$x = \langle \overrightarrow{OP}, e_1\rangle \quad \text{e} \quad y = \langle \overrightarrow{OP}, e_2\rangle.$$

Seja agora $O'X'Y'$ outro sistema de eixos ortogonais no plano. Chamemos de f_1 e f_2 respectivamente os vetores unitários de $O'X'$ e $O'Y'$. Sejam

ainda (a, b) as coordenadas do ponto O' no sistema OXY e θ o ângulo de que é preciso girar o eixo OX (no sentido positivo, isto é, que vai de OX para OY) para coincidir com $O'X'$. Então θ é o ângulo de e_1 para f_1. Portanto

$$f_1 = \cos\theta \cdot e_1 + \text{ sen } \theta \cdot e_2.$$

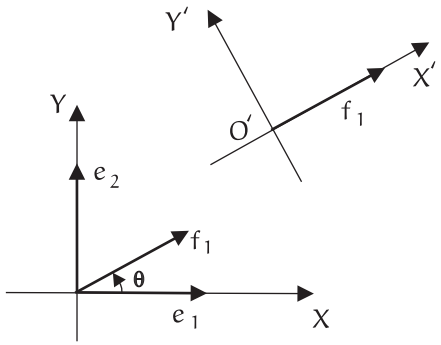


Figura 19.1 - O ângulo θ, entre os vetores e_1 e f_1.

Temos também $\overrightarrow{OO'} = ae_1 + be_2$. Logo

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'} = (x-a)e_1 + (y-b)e_2.$$

Segue-se que

$$x' = \langle \overrightarrow{O'P}, f_1 \rangle = \langle (x-a)e_1 + (y-b)e_2, \cos\theta \cdot e_1 + \text{ sen } \theta \cdot e_2 \rangle,$$

ou seja,

$$x' = (x-a)\cos\theta + (y-b) \text{ sen } \theta.$$

Quanto a y', há 2 possibilidades. Pela nossa definição, θ é o ângulo do vetor unitário e_1 para o vetor f_1. Como $e_1 \perp e_2$ e $f_1 \perp f_2$, o ângulo de e_2 para f_2 pode ser θ ou pode ser $180^\circ + \theta$.

No primeiro caso, o sistema $O'X'Y'$ se obtém de OXY pela translação que leva O em O' (e desloca OX e OY paralelamente), seguida de uma rotação de ângulo θ. Diz-se então que os sistemas $O'X'Y'$ e OXY são *igualmente orientados*, ou têm a *mesma orientação*.

No segundo caso, obtém-se $O'X'Y'$ a partir de OXY por meio da translação que leva O em O', seguida da rotação de ângulo θ e, depois,

de uma reflexão em torno do eixo $O'X'$. Então os sistemas OXY e $O'X'Y'$ têm *orientações opostas*.

Voltemos à nossa mudança de coordenadas. Se $O'X'Y'$ tem a mesma orientação que OXY então o vetor f_2 é obtido de f_1 por uma rotação de $90°$ no sentido positivo. Como as coordenadas de f_1 no sistema OXY são $(\cos\theta,\ \text{sen}\ \theta)$, as de f_2 são $(-\ \text{sen}\ \theta, \cos\theta)$. Portanto:

$$f_2 = -\ \text{sen}\ \theta \cdot e_1 + \cos\theta \cdot e_2.$$

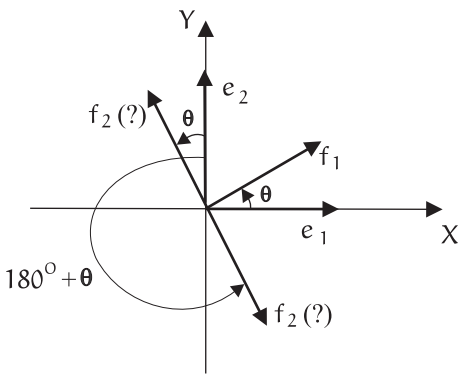


Figura 19.2 - Como f_2 é perpendicular a f_1, o ângulo de e_2 para f_2 pode ser θ ou $180^{\circ}+\theta$.

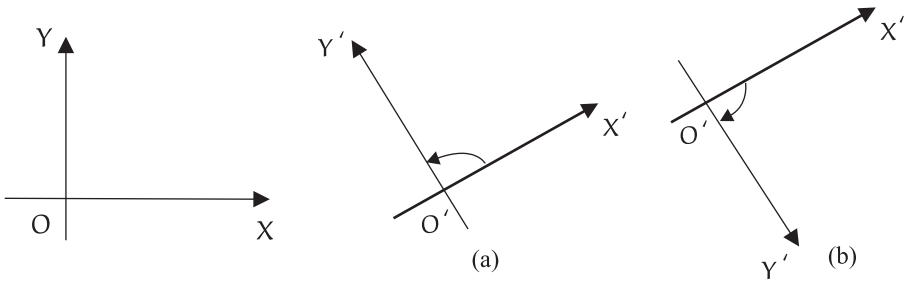


Figura 19.3 - No caso (a), a mudança de eixos se faz por uma translação seguida de rotação. No caso (b), acrescenta-se uma reflexão.

Daí segue-se, como acima, que

$$\begin{aligned} y' &= \langle \overrightarrow{O'P}, f_2 \rangle \\ &= \langle (x-a)e_1 + (y-b)e_2, -\text{ sen } \theta \cdot e_1 + \cos\theta \cdot e_2 \rangle \\ &= -(x-a)\text{ sen } \theta + (y-b)\cos\theta \end{aligned}$$

Se, entretanto, o sistema $O'X'Y'$ tem orientação oposta à de OXY, então

$$f_2 = \text{ sen } \theta \cdot e_1 - \cos\theta \cdot e_2$$

e daí

$$y' = (x-a)\text{ sen } \theta - (y-b)\cos\theta.$$

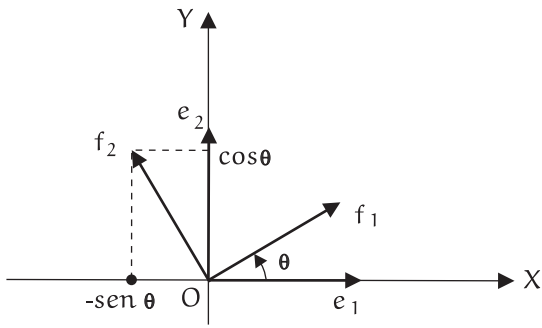


Figura 19.4 - Submetendo os vetores e_1, e_2 a uma rotação de ângulo θ, para obter f_1 e f_2.

Portanto, as fórmulas de mudança de coordenadas são:

$$\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\theta + (y-b)\text{ sen } \theta \\ y' &= -(x-a)\text{ sen } \theta + (y-b)\cos\theta \end{aligned} \tag{19.1}$$

ou

$$\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\theta + (y-b)\text{ sen } \theta \\ y' &= (x-a)\text{ sen } \theta - (y-b)\cos\theta, \end{aligned} \tag{19.2}$$

conforme o novo sistema $O'X'Y'$ seja igualmente orientado em relação ao sistema OXY anterior ou não. Nessas fórmulas, (a, b) são as coordenadas da nova origem O' em relação a OXY e θ é o ângulo da rotação positiva (relativamente a OXY) que leva o eixo OX no eixo $O'X'$.

As equações acima podem ser invertidas, para se obter (x, y) em função de (x', y'). Por exemplo, multiplicando a primeira equação em (19.1) por $\operatorname{sen}\theta$, a segunda por $\cos\theta$, somando as duas equações resultantes e observando que

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1,$$

obtemos:

$$x' \cdot \operatorname{sen}\theta = (x-a)\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta + (y-b)\operatorname{sen}^2\theta$$
$$y' \cdot \cos\theta = -(x-a)\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta + (y-b)\cos^2\theta$$

e, por adição:

$$x' \cdot \operatorname{sen}\theta + y' \cdot \cos\theta = y - b,$$

donde $y = x' \cdot \operatorname{sen}\theta + y' \cdot \cos\theta + b$.

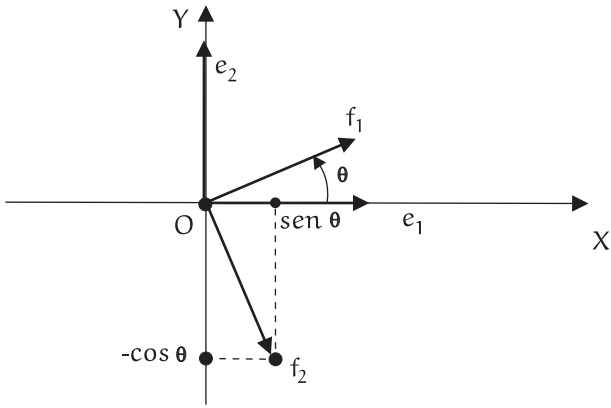


Figura 19.5 - Neste caso, f_2 provém de e_2 por rotação de $180^{\circ} + \theta$.

Multiplicando agora a primeira equação (19.1) por $\cos\theta$, a segunda por $-\operatorname{sen}\theta$, somando e usando outra vez que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, obtemos

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta + a.$$

Procedendo de forma análoga, invertemos o sistema (19.2) e chegamos finalmente com as equações:

$$\begin{aligned} x &= x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \operatorname{sen}\theta + a \\ y &= x' \cdot \operatorname{sen}\theta + y' \cdot \cos\theta + b \end{aligned} \qquad (19.3)$$

$$\begin{aligned} x &= x' \cdot \cos\theta + y' \cdot \text{ sen } \theta + a \\ y &= x' \cdot \text{ sen } \theta - y' \cdot \cos\theta + b \end{aligned} \tag{19.4}$$

Estas fórmulas permitem obter de volta as coordenadas (x, y) do ponto P no sistema OXY em função das coordendas (x', y') do mesmo ponto no sistema $O'X'Y'$. A primeira delas se aplica quando os dois sistemas são igualmente orientados e a segunda quando OXY e $O'X'Y'$ têm orientação opostas (além de translação e rotação, é preciso uma reflexão para passar de um para o outro).

As diferenças entre as fórmulas (19.1), (19.2), de um lado, e (19.3), (19.4) de outro são uma mudança de sinal na segunda equação de (19.3) e as posições de a e b. Estes números são as coordenadas de O' no sistema OXY. Se tivéssemos tomado a e b como as coordenadas de O no sistema $O'X'Y'$, os papéis destas constantes nos dois grupos de equações se inverteriam.

Exemplo 19.1 Consideremos a curva de equação $x^2 + 4y^2 = 4$. Esta equação pode ser escrita na forma $x^2/4 + y^2/1 = 1$ e portanto representa uma elipse. Vejamos o que ocorre com esta equação ao se efetuar uma mudança de eixos que consiste em uma rotação de 45°.

Como vimos acima, as novas coordenadas x' e y' de um ponto do plano se obtêm das antigas coordenadas x e y por meio das expressões

$$x = x' \cos 45° - y' \text{ sen } 45° = x' \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = x' \text{ sen } 45° + y' \cos 45° = x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Substituindo estas expressões na equação original, obtemos:

$$\left(x' \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 4 \left(x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 4,$$

ou seja

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} - x'y' + 2x'^2 + 4x'y' + 2y'^2 = 4$$

e finalmente

$$\frac{5x'^2}{2} + \frac{5y'^2}{2} + 3x'y' = 4$$

Observe que a equação se torna mais complexa do que antes, dificultando seu reconhecimento. Não é mais evidente que a equação acima represente uma elipse. A maior aplicação de mudança de eixos em Geometria Analítica consiste justamente em procurar tornar mais simples a equação de uma curva, permitindo reconhê-la com mais facilidade. Vejamos em exemplo ilustrando esse método.

Exemplo 19.2 Seja E o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $x^2 - xy + y^2 = 1$. Uma rotação positiva de 45° sobre o sistema de eixos OXY introduz novas coordenadas x', y' tais que

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \quad \text{e} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

Estas substituições nos dão imediatamente

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{2}(x')^2 + \frac{3}{2}(y')^2.$$

Portanto, com as novas coordenadas, o conjunto E passa a ser representado pela equação

$$\frac{1}{2}(x')^2 + \frac{3}{2}(y')^2 = 1.$$

Isto mostra que E é uma elipse cujo eixo maior é OX', ou seja, a reta $x = y$.

Exemplo 19.3 Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função linear dada por $\varphi(x, y) = \alpha x + \beta y$. Supomos que φ não é identicamente nula, isto é, que $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Mediante uma rotação de eixos, procuramos introduzir novas coordenadas x', y' tais que φ seja função de x' apenas.

A rotação desejada é aquela que leva o eixo OX sobre o eixo OX' que contém o ponto $A = (\alpha, \beta)$, pois a função φ é constante ao longo de toda reta perpendicular a OA. No novo sistema $OX'Y'$, as coordenadas do ponto A são $A = (a, 0)$, onde $a = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ é o comprimento do segmento OA. Observamos que, no sistema de coordenadas original, dado o ponto $P = (x, y)$, temos $\varphi(P) = \alpha x + \beta y = \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP} \rangle$.

Como o produto interno de dois vetores não depende do sistema de coordenadas, temos sempre $\varphi(P) = \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP} \rangle$ seja qual for o sistema adotado. Ora, no novo sistema as coordenadas são $\overrightarrow{OA} = (a, 0)$ e

$\overrightarrow{OP} = (x', y')$, portanto $\varphi(P) = \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP} \rangle = a \cdot x' + 0 \cdot y' = ax'$, como queríamos.

Observação 19.1 As fórmulas de mudança de coordenadas para vetores do plano assumem um aspecto ligeiramente diferente daquelas relativas a coordenadas de pontos.

Se o vetor v tem coordenadas (α, β) no sistema OXY e (α', β') no sistema $O'X'Y'$ então, chamando de θ o ângulo de OX para $O'X'$, tem-se

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha \cos\theta + \beta \ \text{sen} \ \theta \\ \beta' &= -\alpha \ \text{sen} \ \theta + \beta \cos\theta \end{aligned}$$

se os sistemas OXY e $OX'Y'$ são igualmente orientados, enquanto que

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha \cos\theta + \beta \ \text{sen} \ \theta \\ \beta' &= \alpha \ \text{sen} \ \theta - \beta \cos\theta \end{aligned}$$

no caso em que OXY e $O'X'Y'$ têm orientações opostas.

Com efeito, seja $v = \overrightarrow{O'P}$, onde $P = (x, y)$ no sistema OXY e $P = (x', y')$ no sistema $0'X'Y'$. Então, se (a, b) são as coordenadas de O' no sistema OXY, temos $\alpha = x - a$, $\beta = y - b$, $\alpha' = x'$ e $\beta' = y'$, o que nos dá imediatamente as equações acima, a partir das fórmulas de mudança de coordenadas obtidas anteriormente para pontos do plano.

Em particular, se o sistema $O'X'Y'$ se obtém de OXY apenas por translação ($\theta = 0$) então $\alpha' = \alpha$ e $\beta' = \beta$, ou seja, as coordenadas do vetor v são as mesmas nos dois sistemas.

O principal uso que faremos da mudança de coordenadas será para mostrarmos, nas seções seguintes, que uma escolha adequada de eixos ortogonais deixa claro que a curva definida por uma equação do segundo grau em duas variáveis é (salvo em casos excepcionais) um elipse, uma hipérbole ou uma parábola.

Elipses, hipérboles e parábolas são denominadas *seções cônicas*, ou simplesmente *cônicas* porque podem ser obtidas como interseção de um cone circular com um plano.

Exercícios

1. Uma mudança de eixos no plano manteve a origem fixa, enquanto as coordenadas dos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ passaram a ser (a, b) e (c, d) respectivamente. Quais são as novas coordenadas do ponto $(2, 3)$?

2. Uma mudança de coordenadas passou do sistema OXY para $O'X'Y'$. O ponto $(3,1)$ é a nova origem e os pontos $(5,2)$ e $(2,3)$ pertencem aos semi-eixos positivos $O'X'$ e $O'Y'$ respectivamente. Quais são as coordenadas do ponto $(6,6)$ no sistema $O'X'Y'$? (Lembre que, se f é o vetor unitário de um eixo, a projeção do vetor v sobre esse eixo é $\langle v, f\rangle f$.)

3. Determine a translação de eixos que elimina os termos em x e y na equação $9x^2 + 4y^2 + 18x + 24y = 26$ e permite assim reconhecer a curva que ela representa.

4. Efetue uma rotação de -60° nos eixos OX e OY e com isso consiga identificar a curva $31x^2 + 21y^2 + 10\sqrt{3}xy = 144$.

5. Se $A = (a,b)$ e $C = (c,d)$, sabemos que a expressão $ac + bd$ permanece invariante por mudança de coordenadas pois é o produto interno $\langle u, v\rangle = |u|\cdot|v|\cdot\cos A\widehat{O}C$, onde $u = \overrightarrow{OA}$ e $v = \overrightarrow{OC}$. Mostre diretamente que se $A = (a', b')$ e $C = (c', d')$ num novo sistema de coordenadas, então $a'c' + b'd' = ac + bd$.

6. Com uma figura análoga à Figura 17.2, obtenha uma nova dedução das equações $x = x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta, y = x'\,\mathrm{sen}\,\theta + y'\cos\theta$ para a mudança de coordenadas por uma rotação de ângulo θ.

7. Num sistema de coordenadas em que se tem $F' = \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ e $F = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ determine a equação da elipse que tem esses pontos como focos e cujo eixo menor mede 6.

8. Qual é a equação da parábola cujo foco é o ponto $F = (1,2)$ e cuja diretriz é a reta $x + 2y = -5$?

9. Dados os dois focos de uma hipérbole e a distância entre os vértices, achar a equação da mesma.

10. Efetue a mudança de coordenadas (rotação de eixos) dada por $x = as - bt, y = bs + at$, onde $a = \cos\theta$ e $b = \mathrm{sen}\,\theta$. Como fica, nas novas coordenadas s, t, a equação da circunferência $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$?

20

Formas Quadráticas

Vimos na Seção 7 que as linhas de nível de uma funçao linear de duas variáveis $\varphi(x, y) = ax + by$ (isto é, linhas definidas por equações do tipo $ax + by = c$) são as retas perpendiculares a OA, onde $O = (0, 0)$ e $A = (a, b)$. Estudaremos em seguida as linhas de nível das *funções quadráticas* de duas variáveis, ou seja, das funções $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dadas por

$$\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F.$$

Começaremos analisando o caso particular em que se tem $D = E = F = 0$. Temos assim $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Portanto φ é um polinômio do segundo grau, homogêneo (todos os seus termos têm grau 2). Esses polinômios, que serão o objeto desta seção, são chamados de *formas quadráticas*. Eles surgem em problemas relevantes de Geometria Diferencial, Análise Matemática, Mecânica, etc.

Dada a forma quadrática φ, se introduzirmos, mediante uma rotação dos eixos, novas coordenadas (s, t) teremos

$$x = as - bt, \quad y = bs + at.$$

(Com $a^2 + b^2 = 1$, pois $a = \cos\theta$ e $b = \operatorname{sen}\theta$, onde θ é o ângulo do antigo eixo OX com o novo eixo OX'.) Daí resultará que

$$\varphi(x, y) = \varphi(as - bt, bs + at) = A's^2 + 2B'st + C't^2,$$

onde

$$\begin{aligned} A' &= Aa^2 + 2Bab + Cb^2, \\ B' &= -Aab + B(a^2 - b^2) + Cab, \\ C' &= Ab^2 - 2Bab + Ca^2. \end{aligned}$$

Mostraremos que é possível escolher o vetor unitário $u = (a, b)$, ou seja, o ângulo de rotação θ de modo a ter $B' = 0$. Quando isso for feito, nas novas coordenadas s, t as linhas de nível da função φ serão descritas por equações do tipo

$$A's^2 + C't^2 = c,$$

o que nos permitirá identificá-las facilmente.

Começamos reescrevendo a expressão de B' como

$$B' = a(Ba + Cb) - b(Aa + Bb).$$

Vemos então que $B' = 0$ se, e somente se, o vetor $w = (Aa+Bb, Ba+Cb)$ é múltiplo de $u = (a, b)$, isto é, existe λ tal que

$$Aa + Bb = \lambda a \quad \text{e} \quad Ba + Cb = \lambda b,$$

ou ainda: $(A - \lambda)a + Bb = 0 \quad \text{e} \quad Ba + (C - \lambda)b = 0.$

Assim, tem-se $B' = 0$ se somente se, o vetor unitário $u = (a, b)$ é uma solução (não-trivial) do sistema homogêneo

$$(*) \qquad \begin{cases} (A - \lambda)x + By = 0 \\ Bx + (C - \lambda)y = 0, \end{cases}$$

para algum λ convenientemente escolhido. Então λ deve ser tal que o determinante $(A - \lambda)(C - \lambda) - B^2$ desse sistema seja igual a zero. Isto nos leva à equação

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - B^2 = 0,$$

de importância capital, conhecida como a *equação característica* da forma quadrática φ, ou da matriz $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$, chamada *a matriz de* φ.

O discriminante da equação característica é

$$\Delta = (A + C)^2 - 4(AC - B^2) = (A - C)^2 + 4B^2 \geq 0,$$

logo ela sempre possui raízes reais.

As raízes γ_1, γ_2 da equação característica são chamadas os *autovalores* da forma quadrática φ, ou de sua matriz $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$.

Dizer que λ_1 e λ_2 são autovalores de φ significa, portanto, afirmar que λ_1 e λ_2 são os únicos valores de λ para os quais o sistema linear homogêneo $(*)$ admite soluções não-triviais, ou seja, é indeterminado. Isto equivale a dizer que, para $\lambda = \lambda_1$ ou $\lambda = \lambda_2$ (e somente para estes valores de λ), as soluções (x, y) de uma das equações do sistema são também soluções da outra.

Notemos ainda que se (x, y) é uma solução do sistema $(*)$ então, para todo número real k, o par (kx, ky) é também solução de $(*)$.

Vemos agora como proceder para encontrar a rotação do sistema de eixos (ou seja, o vetor unitário $u = (a, b)$ que torna $B' = 0$).

Primeiro: Resolvemos a equação característica. Seja λ_1 uma de suas raízes.

Segundo: Tomamos uma solução não-trivial da equação $Ax + By = \lambda_1 x$. (Por exemplo, $x = 1$ e $y = (\lambda - A)/B$.)

Terceiro: Obtida a solução (x, y), pomos $a = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $b = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Então $u = (a, b)$ é um vetor unitário, que cumpre ainda $Aa + Bb = \lambda_1 a$, logo vale também $Ba + Cb = \lambda_1 b$, pois o sistema $(*)$, com $\lambda = \lambda_1$, é indeterminado.

Para significar que o vetor $u = (a, b)$ é uma solução não-trivial do sistema $(*)$ com $\lambda = \lambda_1$, isto é, que se tem $Aa + Bb = \lambda_1 a$ e $Ba + Cb = \lambda_1 b$, diz-se que u é um *autovetor* de φ (ou da matriz $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$), associado ao autovalor λ_1.

Observamos que o vetor $u^* = (-b, a)$, obtido de u por uma rotação de $+90°$, também é um autovetor de φ, agora associado ao autovalor λ_2.

Com efeito, sabemos que $\lambda_1 + \lambda_2 = A + C$ (soma das raízes de uma equação do segundo grau), logo $\lambda_2 = A + C - \lambda_1$. Temos ainda $Ba + Cb = \lambda_1 b$, logo $Ba = \lambda_1 b - Cb$. Portanto

$$A(-b) + Ba = -Ab + \lambda_1 b - Cb = (A + C - \lambda_1)(-b) = \lambda_2(-b).$$

Mas $\lambda = \lambda_2$ também torna o sistema $(*)$ indeterminado, logo $(-b, a)$ também é solução da segunda equação, ou seja, $B(-b) + Ca = \lambda_2 a$.

As duas igualdades $A(-b) + Ba = \lambda_2(-b)$ e $B(-b) + Ca = \lambda_2 a$ significam que $u^* = (-b, a)$ é um autovetor de φ, associado ao autovalor λ_2.

Agora, um bônus: uma vez encontrados os valores λ_1 e λ_2, não é preciso calcular A' e C'. Tem-se automaticamente $A' = \lambda_1$ e $C' = \lambda_2$. Realmente:

$$\begin{aligned} A' &= Aa^2 + 2Bab + Cb^2 = Aa^2 + Bab + Bab + Cb^2 \\ &= (Aa + Bb)a + (Ba + Cb)b = \lambda_1 a^2 + \lambda_1 b^2 = \lambda_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C' &= Ab^2 - 2Bab + Ca^2 = Ab^2 - Bab - Bab + Ca^2 \\ &= [A(-b) + Ba](-b) + [B(-b) + Ca]a = \lambda_2 \cdot (-b)^2 + \lambda_2 a^2 = \lambda_2. \end{aligned}$$

Portanto, nas novas coordenadas s, t, introduzidas após a rotação de eixos determinada pelo vetor $u = (a, b)$, a forma quadratica φ assume o aspecto

$$\overline{\varphi}(s, t) = \varphi(as - bt, bs + at) = \lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2.$$

Isto nos permite identificar as linhas de nível, definidas por equações do tipo $\varphi(x, y) = c$, até mesmo por mera inspeção dos coeficientes A, B e C da forma quadrática φ. O ponto de partida é a observação de que $AC - B^2 = \lambda_1\lambda_2$ (produto das raízes de uma equação do segundo grau). Então há 3 possibilidades, que enumeramos a seguir.

Caso 1: $AC - B^2 > 0$. Então λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal. Para todo $c \neq 0$, a linha de nível c, definida pela equação $\varphi(x, y) = c$, ou $\lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = c$, pode ser equivalentemente representada pela equação $\dfrac{s^2}{m^2} + \dfrac{t^2}{n^2} = 1$, com $m = \sqrt{c/\lambda_1}$ e $n = \sqrt{c/\lambda_2}$ caso c tenha o mesmo sinal que λ_1 e λ_2. Portanto essas linhas de nível são elipses. Caso c tenha sinal oposto ao sinal comum de λ_1 e λ_2 então a linha de nível $\lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = c$ é vazia. Finalmente, se $c = 0$ então a origem é o único ponto do plano que cumpre a condição $\lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = c$.

Caso 2: $AC - B^2 < 0$. Então λ_1 e λ_2 têm sinais opostos. Dado $c \neq 0$, a equação $\varphi(x, y) = c$, ou $\lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = c$, escreve-se equivalentemente como $\dfrac{s^2}{m^2} - \dfrac{t^2}{n^2} = 1$, com $m = \sqrt{c/\lambda_1}$ e $n = \sqrt{-c/\lambda_2}$, caso o sinal de c

seja o mesmo que o de λ_1 (e contrário ao de λ_2). Se c e λ_1 têm sinais opostos (logo c e λ_2 têm o mesmo sinal) então $\varphi(x,y) = c$ equivale a $\frac{t^2}{n^2} - \frac{s^2}{m^2} = 1$ com $m = \sqrt{-c/\lambda_1}$ e $n = \sqrt{c/\lambda_2}$. Em qualquer hipótese, quando $AC - B^2 < 0$ as linhas de nível $c \neq 0$ da forma quadrática φ são hipérboles. Quanto à linha de nível zero, sua equação é $\lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = 0$ donde $t^2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} s^2$. Logo esta equação define o par de retas $t = \pm k \cdot s, k = \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$.

Caso 3: $AC - B^2 = 0$. Então $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, logo um dos autovalores, digamos λ_2, é zero. Não pode ser também $\lambda_1 = 0$ pois isto daria $A + C = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Mas, como $AC = B^2 \geq 0$, A e C não têm sinais opostos, logo $A = C = 0$ e $B = \sqrt{AC} = 0$. A forma φ desapareceria. Isto posto, cada linha de nível $\varphi(x,y) = c$ é representada, nas coordenadas s, t pela equação $\lambda_1 s^2 = c$, ou seja, $s^2 = c/\lambda_1$, logo é vazia se c e λ_1 têm sinais opostos e é formada pelas retas paralelas $s = \pm\sqrt{c/\lambda_1}$ quando c e λ_1 têm o mesmo sinal. Se $c = 0$, a linha $\varphi(x,y) = c$ é a reta $s = 0$ (eixo t).

Observação 20.1 O caso $AC - B^2 = 0$ pode ser tratado diretamente: Suponhamos $A \geq 0, B \geq 0$ e $C \geq 0$. Então, pondo $m = \sqrt{A}$ e $n = \sqrt{C}$, teremos $\varphi(x,y) = m^2x^2 + 2mnxy + n^2y^2 = (mx + my)^2$, de modo que a equação $\varphi(x,y) = c$ significa $mx + ny = \pm\sqrt{c}$ se $c \geq 0$ e define o conjunto vazio se $c < 0$. Assim, a linha de nível $\varphi(x,y) = c$ é formada pelo par de retas paralelas $mx + ny = \sqrt{c}$ e $mx + ny = -\sqrt{c}$ quando $c > 0$ e pela reta $mx + ny = 0$ se $c = 0$.

Se for $A \geq 0, C \geq 0$ e $B < 0$ vale $\varphi(x,y) = (mx - ny)^2$. Analogamente, $A < 0, C < 0$ e $B \geq 0$ dá $\varphi(x,y) = -(mx - ny)^2$ enquanto $A < 0, C < 0$ e $B < 0$ leva a $\varphi(x,y) = -(mx + ny)^2$.

Exemplo 20.1 Seja $\varphi(x,y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2$. A equação característica desta forma quadrática é $\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$. Uma rotação dos eixos introduz coordenadas s, t tais que

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 2s^2 + 8t^2.$$

Ora, a equação $2s^2 + 8t^2 = c$ não tem solução quando $c < 0$, tem a única solução $s = t = 0$ quando $c = 0$ e, para $c > 0$, equivale a

$$\frac{s^2}{\alpha^2} + \frac{t^2}{\beta^2} = 1,$$

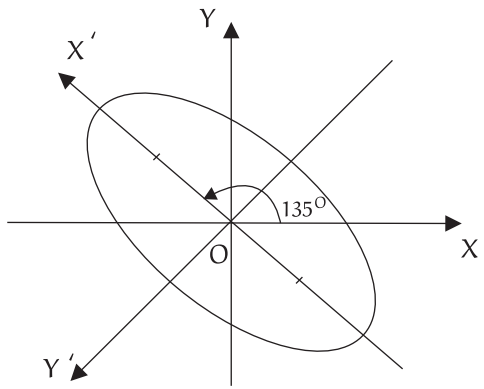


Figura 20.1 - A elipse de equação $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 1$.

com $\alpha = \sqrt{c/2}$ e $\beta = \sqrt{c/8}$, logo representa uma elipse neste último caso. Portanto a linha de nível definida por $5x^2 + 6xy + 5y^2 = c$ é vazia se $c < 0$, reduz-se ao ponto $0 = (0, 0)$ se $c = 0$ e é uma elipse para todo valor positivo de c. O eixo maior dessa elipse é o eixo s, ou seja, é a reta que passa pela origem e contém todos os pontos $P = (x, y)$ que são soluções não-triviais da equação $Ax + By = \lambda_1 x$, que neste caso se escreve $5x + 3y = 2x$ ou, equivalentemente, $x + y = 0$. Um vetor unitário sobre a reta $x + y = 0$ é $u = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Ele determina a orientação do eixo OX' que é o eixo s. Como o ângulo de OX para OX' é de $135°$, esta é a rotação que se deve fazer para passar das coordenadas x, y para s, t. Sendo $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{\dfrac{3c}{8}}$, os focos da elipse têm coordenadas $s = \pm\sqrt{\frac{3c}{8}}$ no sistema $OX'Y'$.

Observação 20.2 Se tivéssemos tomado $u' = -u = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ para orientar o eixo OX', a rotação de OX para OX' seria de $-45°$.

Exemplo 20.2 Seja $\varphi(x, y) = x^2 + 6xy + y^2$. A equação característica desta forma quadrática é $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -2$. Uma rotação dos eixos introduz no plano coordenadas s, t tais que

$$x^2 + 6xy + y^2 = 4s^2 - 2t^2.$$

Em termos destas novas coordenadas, a linha de nível $\varphi(x, y) = c$ se

escreve $4s^2 - 2t^2 = c$, o que equivale a

$$\frac{s^2}{c/4} - \frac{t^2}{c/2} = 1,$$

logo representa a hipérbole $\dfrac{s^2}{\alpha^2} - \dfrac{t^2}{\beta^2} = 1$, com $\alpha = \sqrt{c/4}$ e $\beta = \sqrt{c/2}$ se $c > 0$ ou a hipérbole

$$\frac{t^2}{\beta^2} - \frac{s^2}{\alpha^2} = 1,$$

com $\alpha = \sqrt{-c/4}$ e $\beta = \sqrt{-c/2}$ quando $c < 0$.

Portanto, para todo $c \neq 0$, a equação $x^2 + 6xy + y^2 = c$ representa uma hipérbole (linha de nível c da função φ).

Por sua vez, a equação $4s^2 - 2t^2 = 0$ equivale a

$$(2s + t\sqrt{2})(2s - t\sqrt{2}) = 0.$$

As soluções desta equação são, portanto, os pontos (s, t) situados sobre uma das retas $2s + \sqrt{2}t = 0$ ou $2s - \sqrt{2}t = 0$. Assim, a equação $x^2+6xy+y^2 = 0$ define um par de retas que passam pela origem ("linha" de nível zero da função $\varphi(x, y)$).

Se quisermos as equações dessas retas em termos das coordenadas, basta completar o quadrado na equação $x^2 + 6xy + y^2 = 0$, obtendo $(x + 3y)^2 - 8y^2 = 0$ e daí $x + (3 + 2\sqrt{2})y = 0$ ou $x + (3 - 2\sqrt{2})y = 0$, que são as equações das retas procuradas.

Podemos então concluir que a equação $x^2 + 6xy + y^2 = c$ define uma hipérbole quando $c \neq 0$, ou um par de retas passando pela origem quando $c = 0$.

Exemplo 20.3 Seja $\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Ay^2$. (Noutros termos: $A = C$.) A equação característica é $\lambda^2 - 2A\lambda + A^2 - B^2 = 0$. Autovalores: $\lambda_1 = A + B, \lambda_2 = A - B$. Uma rotação dos eixos traz novas coordenadas s, t nas quais a forma assume o aspecto $(A + B)s^2 + (A - B)t^2$. Qual foi o ângulo de rotação? O novo eixo s contém o ponto $x = a, y = b$, onde $Aa + Bb = (A + B)a$, logo $Bb = Ba$. Podemos supor $B \neq 0$. Então $a = b$. Logo, quando $A = C$, o ângulo de rotação que elimina B é o ângulo de $45°$. Evidentemente, as rotações de $-45°, 135°$ e $-135°$ também eliminam B.

Mostraremos agora como as noções de autovalor e autovetor fornecem uma resposta ao problema de achar os pontos da circunferência unitária

$x^2+y^2=1$ onde a forma quadrática $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ assume seu valor máximo.

Teorema 20.1. *Sejam $\lambda_1 \geq \lambda_2$ os autovalores da forma quadrática $\varphi(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$. Então:*

(1) *Se $\lambda_1 = \lambda_2$ então $\varphi(x,y)$ é constante quando $x^2 + y^2 = 1$ e todo vetor unitário é autovetor de φ.*

(2) *Se $\lambda_1 > \lambda_2$ então o maior valor de $\varphi(x,y)$ com $x^2 + y^2 = 1$ é $\lambda_1 = \varphi(a,b) = \varphi(-a,-b)$, onde $u = (a,b)$ é um autovetor unitário correspondente ao autovalor λ_1. Se $(x,y) \neq \pm u$ então $\varphi(x,y) < \lambda_1$.*

Demonstração: (1) Autovalores iguais significam que o discriminante Δ da equação característica $\lambda^2 - (A+C)\lambda + AC - B^2 = 0$ é zero. Ora, $\Delta = (A+C)^2 - 4(AC - B^2) = (A-C)^2 + 4B^2 = 0$, o que quer dizer $A = C$ e $B = 0$, logo $\varphi(x,y) = A \cdot (x^2+y^2)$. Assim, $\varphi(x,y)$ é constante quando $x^2 + y^2 = 1$. Além disso, qualquer que seja o vetor não-nulo $u = (a,b)$, tem-se

$$Aa + Bb = A \cdot a \quad (\text{pois } B = 0) \quad \text{e} \quad Ba + Cb = A \cdot b \quad (\text{pois } A = C).$$

Portanto u é autovetor, correspondente ao autovalor A.

(2) Se $\lambda_1 > \lambda_2$ e $u = (a,b)$ é autovetor unitário correspondente ao autovalor λ_1, consideramos o sistema ortogonal em que u é o vetor unitário de um dos eixos. Nas novas coordenadas, s,t, onde $x = as - bt, y = bs + at$, temos

$$\varphi(x,y) = \varphi(as - bt, bs + at) = \overline{\varphi}(s,t) = \lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2.$$

É claro que $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow s^2 + t^2 = 1$. Logo

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \varphi(x,y) = \overline{\varphi}(s,t) = \lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 \leq \lambda_1 s^2 + \lambda_1 t^2 = \lambda_1.$$

Como $\varphi(a,b) = \overline{\varphi}(1,0) = \lambda_1$, vemos que $\varphi(a,b) = \lambda_1$ é o maior valor de $\varphi(x,y)$ com $x^2 + y^2 = 1$. Além disso,

$$t \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 < \lambda_1 s^2 + \lambda_1 t^2 = \lambda_1$$

logo o valor máximo λ_1 só pode ser atingido por $\overline{\varphi}(s,t)$ com $s^2 + t^2 = 1$ quando $t = 0$, ou seja quando $s = \pm 1$, o que corresponde a $(x,y) = \pm(a,b) = \pm u$.

Observação 20.3 De modo inteiramente análogo se mostra que o menor valor de $\varphi(x, y)$ quando $x^2 + y^2 = 1$ é $\lambda_2 = \varphi(-b, a)$, onde $v = (-b, a)$ é o autovetor unitário (ortogonal a u) correspondente ao autovalor λ_2. Além disso, $\varphi(x, y) > \lambda_2$ se $(x, y) \neq \pm v$.

Observação 20.4 Vimos no início desta seção que se os vetores unitários de um sistema de eixos são autovalores da forma quadrática φ então, em termos das coordenadas s, t desse sistema, a forma se exprime como $\lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2$. Resulta, portanto, do teorema acima que se o maior valor de $\varphi(x, y)$ quando $x^2 + y^2 = 1$ é $\varphi(1, 0)$ então $\varphi(x, y) = Ax^2 + Cy^2$. (Pois, neste caso $(1, 0)$ e $(0, 1)$ são autovetores de φ.)

Elipses e hipérboles, que podem ser obtidas como curvas de nível de uma forma quadrática, chamam-se *cônicas centrais* porque possuem um centro de simetria. Veremos na próxima seção que as parábolas (que não possuem centro de simetria) são representadas por equações do segundo grau nas quais necessariamente o coeficiente de x ou o coeficiente de y é diferente de zero.

Exercícios

1. Para cada uma das formas quadráticas abaixo, execute as seguintes tarefas:

a) Escreva sua matriz e sua equação característica;
b) Obtenha seus autovalores;
c) Descreva suas linhas de nível;
d) Ache autovetores unitários ortogonais u e u^*;
e) Determine os novos eixos em cujas coordenadas a forma quadrática se exprime como $A's^2 + C't^2$;
f) Ache os focos da cônica $A's^2 + C't^2 = 1$ em termos das coordenadas x, y.

As formas quadráticas são:

a) $\varphi(x, y) = x^2 + xy + y^2$
b) $\varphi(x, y) = xy$
c) $\varphi(x, y) = x^2 - 6xy + 9y^2$
d) $\varphi(x, y) = x^2 + xy - y^2$
e) $\varphi(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2$
f) $\varphi(x, y) = x^2 + 24xy - 6y^2$.

2. Descreva precisamente a linha de nível zero da função $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x, y) = x^3 - y^3 - x - y$.

3. Mediante a mudança de coordenadas $x = as - bt, y = bs + at$, obtida por uma rotação de eixos, a forma quadrática $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ passa a expressar-se como $A's^2+2B'st+C't^2$. Mostre que $A'+C' = A+C$ e $A'C'-(B')^2 = AC-B^2$ e conclua que a equação característica é invariante por rotação dos eixos.

21

A Equação Geral do Segundo Grau

A forma geral de uma função quadrática de duas variáveis é

$$\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F.$$

Mostraremos agora que, em geral, a linha de nível $\varphi(x, y) = 0$ é uma elipse, hipérbole ou parábola. Excepcionalmente, a elipse pode reduzir-se a um ponto ou ao conjunto vazio, a hipérbole pode degenerar-se num par de retas concorrentes e, em vez da parábola, pode-se ter o conjunto vazio, uma reta ou um par de retas paralelas.

Procuremos uma translação de eixos, $x = s + h, y = t + k$, após a qual os termos Dx e Ey desapareçam. Com estas substituições, a função φ assume o aspecto abaixo:

$$\overline{\varphi}(s, t) = \varphi(s + h, t + k) = As^2 + 2Bst + Ct^2 + D's + E't + F', \text{ onde:}$$

$$\begin{aligned} D' &= 2Ah + 2Bk + D, \\ E' &= 2Bh + 2Ck + E, \\ F' &= Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F \end{aligned}$$

Como se vê, os coeficientes A, B e C são invariantes por translação. Por outro lado, o coeficiente F' é de menor importância pois afeta apenas o nível mas não o aspecto geral das linhas $\varphi(x, y) = c$ ou $\overline{\varphi}(s, t) = c'$, vistas em conjunto.

Queremos obter valores para h e k de modo que tenhamos $D'=E'=0$. Noutras palavras, buscamos solução pra o sistema de equações

$$(*) \qquad \begin{cases} Ah + Bk = -D/2 \\ Bh + Ck = -E/2. \end{cases}$$

Se $AC-B^2 \neq 0$, este sistema possui solução única (h, k). A translação de eixos $x = s+h, y = t+k$ introduz novas coordenadas (s, t), em termos das quais a função quadrática φ assume o aspecto

$$\overline{\varphi}(s, t) = As^2 + 2Bst + Ct^2 + F'$$

Recaímos assim no caso da Seção 20. A equação geral do segundo grau $\varphi(x, y) = 0$ equivale a $\overline{\varphi}(s, t) = -F'$, onde $\overline{\varphi}$ é a forma quadrática cujos coeficientes são os três primeiros coeficientes de φ. Vejamos um exemplo.

Exemplo 21.1 Que curva plana é definida pela equação $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$? Para responder a esta pergunta, devemos achar h, k tais que a translação de eixos $x = s + h, y = t + k$ faça desaparecer os termos do primeiro grau em s e t na expressão de $5(s + h)^2 + 6(s + h)(t+k)+5(t+k)^2+2(s+h)-4(t+k)+1$. Em função das coordenadas s, t a equação dada se descreve como

$$5s^2 + 6st + 5t^2 + (10h + 6k + 2)s + (6h + 10k - 4)t + F' = 0,$$

$$\text{onde} \quad F' = 5h^2 + 6hk + 5k^2 + 2h - 4k + 1.$$

O sistema que nos dará os valores de h e k é:

$$\begin{cases} 5h + 3k = -1 \\ 3h + 5k = 2, \end{cases}$$

cuja solução é $h = -11/16, k = 13/16$. Com estes valores, obtemos $F' = -21/16$. Assim, em termos das coordenadas s, t, a curva plana que desejamos identificar tem a equação

$$5s^2 + 6st + 5t^2 = 21/16.$$

Conforme vimos no Exemplo 20.1, uma rotação de $+135^0$ introduz novas coordenadas p, q, nas quais a equação acima se escreve como

$$2p^2 + 8q^2 = 21/16,$$

portanto a curva definida pela equação $5x^2+6xy+5y^2+2x-4y+1=0$ é uma elipse.

Voltemos à análise do caso geral.

Se $AC-B^2=0$ então o sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} Ah+Bk=-D/2 \\ Bh+Ck=-E/2 \end{cases}$$

pode ser indeterminado ou impossível, conforme a segunda equação seja ou não um múltiplo da primeira. (Com um pouco mais de detalhe: $AC-B^2=0$ significa que existe m tal que $B=mA$ e $C=mB$. Se o mesmo m satisfizer ainda $E=mD$, o sistema possui infinitas soluções. Se, porém, $mD\neq E$ então o sistema não possui solução alguma.)

Quando o sistema (*) é indeterminado, usando uma qualquer de suas soluções (h,k), a translação de eixos $x=s+k$, $y=t+k$ torna $D'=E'=0$ de modo que, nas coordenadas s,t, a função quadrática φ assume a forma

$$\overline{\varphi}(s,t)=As^2+2Bst+Ct^2+F'$$

Como $AC-B^2=0$ a equação característica da forma quadrática $As^2+2Bst+Ct^2$ é $\lambda^2-(A+C)\lambda=0$, com uma raiz $\lambda_1=A+C\neq 0$ e $\lambda_2=0$. Uma rotação de eixos conveniente introduz coordenadas p,q que dão a $\overline{\varphi}$ o aspecto

$$\varphi(x,y)=\overline{\varphi}(s,t)=\overline{\overline{\varphi}}(p,q)=(A+C)p^2+F'',$$

de modo que a linha de nível zero de $\overline{\overline{\varphi}}$ (e, consequentemente, de φ) é o conjunto vazio ou um par de retas paralelas se $F''\neq 0$, e uma só reta, se $F''=0$.

Exemplo 21.2 Que curva plana é representada pela equação $4x^2+12xy+9y^2+4x+6y+1=0$? Tentando achar h,k de modo que a translação de eixos $x=s+h, y=t+k$ elimine os termos $4x$ e $6y$, chegamos ao sistema

$$\begin{aligned} 4h+6k&=-2 \\ 6h+9k&=-3, \end{aligned}$$

o qual é indeterminado. Uma de suas soluções é $h=1,k=-1$. As substituições $x=s+1, y=t-1$ transformam nossa equação em $4s^2+12st+9t^2=0$, ou seja, $(2s+3t)^2=0$, logo $2s+3t=0, t=(-2/3)s$.

A equação dada define uma única reta. Se a equação dada fosse $4x^2 + 12xy+9y^2+4x+6y-1 = 0$, ela se exprimiria, em termos das coordenadas s, t, como $4s^2+12st+9t^2 = 2$, logo o conjunto por ela definido seria o par de retas paralelas $2s + 3t = \pm\sqrt{2}$. Finalmente, a equação $4x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x + 6y + 2 = 0$ define o conjunto vazio. Uma forma rápida de ver isto é observar que se pode reescrevê-la como $(2x+3y)^2+2(2x+3y)+2 = 0$, ou seja, $(2x + 3y + 1)^2 + 1 = 0$.

Completando a discussão geral, examinemos o caso em que se tem ainda $AC - B^2 = 0$ mas agora o sistema (*) é impossível. Neste caso, não há como encontrar h e k de modo a ter $D' = E' = 0$. Podemos, entretanto, achar h e k tais que $E' = 0$ e teremos, após a translação de eixos $x = s + h, y = t + k$,

$$\varphi(x, y) = \overline{\varphi}(s, t) = As^2 + 2Bst + Ct^2 + D's + F', \text{ com } D' \neq 0.$$

A equação característica da forma quadrática $As^2 + 2Bst + Ct^2$ é $\lambda^2 - (A + C)\lambda = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = A + C \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$. Uma rotação conveniente de eixos introduz novas coordenadas p, q com $s = ap - bq, t = bp + aq$ (com $a^2 + b^2 = 1$) que nos dão:

$$\varphi(x, y) = \overline{\varphi}(s, t) = \overline{\overline{\varphi}}(p, q) = (A + C)p^2 + D'a \cdot p - D'b \cdot q + F'$$

Então a equação inicial $\varphi(x, y) = 0$ equivale a

$$(A + C)p^2 + D'a \cdot p + D'b \cdot q + F' = 0.$$

Podemos assegurar que $a \neq 0$ e $b \neq 0$ pois, do contrário, teríamos feito uma rotação de $90°$ ou $180°$, o que significa apenas permutar s com t ou mudar as orientações nos eixos. Assim, na última equação, tem-se $D' \cdot b \neq 0$, logo ela pode ser escrita sob a forma $q = \alpha p^2 + \beta p + \gamma$ e define, portanto, uma parábola.

Exemplo 21.3 Que curva é representada pela equação $4x^2 + 12xy + 9y^2 + 8x + 6y + 1 = 0$? As substituições $x = s - 2, y = t + 1$ dão a esta equação a forma $4s^2+12st+9t^2+4s-8 = 0$. (Seguimos o conselho dado acima e eliminamos o coeficiente de t.) Usando o método da Seção 20, efetuamos a rotação de eixos $s = ap - bq$, $t = bp + aq$, com $a = 2/\sqrt{13}$ e $b = 3/\sqrt{13}$ para eliminar o coeficiente de st. Então a equação assume o aspecto

$$13p^2 + \frac{8}{\sqrt{13}}p - \frac{12}{\sqrt{13}}q - 8 = 0,$$

ou seja,

$$q = \frac{13}{12}\sqrt{13}p^2 + \frac{2}{3}p - \frac{2}{3}\sqrt{13},$$

logo a equação dada define uma parábola.

Exemplo 21.4 Seja $\varphi(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3x + 4y + 4$. Determinemos h e k de modo que a translação $x = s + h$, $y = t + k$ elimine os termos $3x$ e $4y$. Temos $AC - B^2 = 2$, logo $\varphi(x, y) = 0$ define uma elipse, um ponto ou $\varnothing$. Vejamos qual é o caso e, se for elipse, quais são seus eixos. Temos

$$\begin{aligned}\varphi(s + h, t + k) &= s^2 + 2hs + h^2 + 2t^2 + 4kt \\ &\quad +2k^2 + 3s + 3h + 4t + 4k + 4 \\ &= s^2 + 2t^2 + (2h + 3)s + (4k + 4)t \\ &\quad +h^2 + 2k^2 + 3h + 4k + 4.\end{aligned}$$

A fim de termos $2h + 3 = 0$ e $4k + 4 = 0$, devemos tomar $h = -3/2$ e $k = -1$:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \varphi(s - 3/2, t - 1) \\ &= s^2 + 2t^2 + \frac{9}{4} + 2 - \frac{9}{2} - 4 + 4 \\ &= s^2 + 2t^2 - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Portanto, a equação $x^2 + 2y^2 + 3x + 4y + 4 = 0$ se exprime, nas novas coordenadas, como $s^2 + 2t^2 = 1/4$, ou seja,

$$\frac{s^2}{(1/2)^2} + \frac{t^2}{(1/\sqrt{8})^2} = 1,$$

logo representa uma elipse com eixos $1/2$ e $1/\sqrt{8}$, paralelos aos eixos OX e OY.

Exemplo 21.5 Consideremos uma equação com $AC - B^2 = 0$:

$$2x^2 + 12xy + 18y^2 + x + y + 1 = 0.$$

Os autovalores da forma quadrática $2x^2 + 12xy + 18y^2$ são 20 e 0. Um autovetor unitário: $u = (3/\sqrt{10}, -1\sqrt{10})$. A mudança de coordenadas

$$\begin{aligned}x &= \tfrac{3}{\sqrt{10}}s + \tfrac{1}{\sqrt{10}}t \\ y &= \tfrac{-1}{\sqrt{10}}s + \tfrac{3}{\sqrt{10}}t,\end{aligned}$$

correspondente à rotação em torno de O que leva o vetor $e_1 = (1, 0)$ sobre u, faz com que a equação dada se exprima, nas novas coordenadas, sob a forma

$$(20\sqrt{10})t^2 + 2s + 4t + \sqrt{10} = 0,$$

logo define a parábola

$$s = -10\sqrt{10}t^2 - 2t - \sqrt{10}/2.$$

Para encerrar esta seção, observaremos como o reconhecimento da equação da circunferência, feito de modo direto na Seção 12, se enquadra no contexo da discussão mais geral que acabamos de fazer.

Uma circunferência é uma elipse com eixos iguais. Portanto, se a equação do segundo grau

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa uma circunferência, a equação característica

$$\gamma^2 - (A + C)\gamma + AC - B^2 = 0$$

tem raízes iguais. Como o discriminante desta equação é

$$(A + C)^2 - 4(AC - B^2) = (A - C)^2 + B^2,$$

isto acontece se, e somente se, $A = C$ e $B = 0$.

Portanto a equação da circunferência deve ter a forma

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Completando os quadrados, vimos na Seção 13 que esta equação se reescreve como

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}.$$

Logo, a equação geral do segundo grau representa uma circunferência se, e somente se, $A = C(\neq 0), B = 0$ e $D^2 + E^2 > 4AF$.

Exercícios

1. Para cada uma das equações abaixo, identifique detalhadamente a curva que ela define e a mudança de coordenadas que permitiu essa conclusão.

a) $36x^2 + 24xy + 29y^2 - 120x + 10y - 55 = 0$

b) $17x^2 - 312xy + 108y^2 - 590x - 120y + 688 = 0$

c) $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x - 55y + 171 = 0$

d) $6x^2 - 5xy + y^2 - 17x + 7y + 8 = 0$

e) $x^2 - xy + y^2 - 7x + 5y + 14 = 0$

f) $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 9x - 6y + 6 = 0$

2. Mostre que $B^2 - AC = 0$ se, e somente se,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2.$$

22

O Sinal de uma Forma Quadrática

Em algumas aplicações, como no estudo dos pontos críticos de uma função de diversas variáveis, há interesse em saber se uma determinada forma quadrática φ assume valores positivos e negativos, ou não muda de sinal.

No caso de duas variáveis, que nos concerne aqui, esta pergunta pode ser respondida com o que aprendemos na Seção 20, pois $\varphi(x, y) = As^2 + Ct^2$ muda de sinal quando $AC < 0$ e não muda quando $AC \geq 0$.

O método da Seção 20 nos fornece muitas outras informações além do sinal de φ. Ele pode ser aplicado a formas com um número qualquer n de variáveis mas sua utilização prática depende do cálculo das raízes de uma equação de grau n. Além disso, mesmo com duas variáveis apenas, se tudo o que queremos saber é o sinal de φ, a questão pode ser resolvida de forma mais simples, usando o recurso elementar de completar o quadrado.

O processo de completar o quadrado consiste na observação óbvia de

que $a^2 + 2ab = (a+b)^2 - b^2$. Portanto, supondo $A \neq 0$:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \\ &= A\left(x^2 + 2x \cdot \frac{B}{A}y\right) + Cy^2 \\ &= A\left[\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2 - \frac{B^2}{A^2}y^2\right] + Cy^2 \\ &= As^2 - \frac{\Delta}{A}y^2,\end{aligned}$$

onde $s = x + By/A$ e $\Delta = B^2 - AC$. Daí concluímos:

1) Se $\Delta < 0$ então tem-se $\varphi(x,y) > 0$ para todo par (x,y) diferente de $(0,0)$ ou $\varphi(x,y) < 0$ para todos esses pares, conforme seja $A > 0$ ou < 0. Portanto, quando $\Delta < 0$ a forma quadrática φ não muda de sinal e tem o mesmo sinal de A. (Note que, diante da hipótese $B^2 - AC < 0$, A e C têm o mesmo sinal.)

2) Se $\Delta > 0$ então φ assume valores positivos e valores negativos: se $s = 0$ então o sinal de φ é oposto ao de A e se $y = 0$ φ tem o sinal de A.

3) Se $\Delta = 0$, φ se anula em todos os pontos da reta $s = 0$ mas nos demais pontos tem o sinal de A. Também neste caso, φ não muda de sinal.

Estes fatos se resumem dizendo-se que:

Quando $\Delta < 0$, a forma quadrática φ é *positiva* ou *negativa* conforme se tenha $A > 0$ ou $A < 0$. (Equivalentemente: $C > 0$ ou $C < 0$.)

Quando $\Delta > 0$, a forma quadrática φ é *indefinida* (assume valores negativos e valores positivos).

Finalmente, quando $\Delta = 0$, φ é *não-negativa* se $A > 0$ e *não-positiva* se $A < 0$. (Note que, neste caso, $B^2 = AC$ logo A e C não podem ter sinais opostos.)

Quando a forma quadrática φ é positiva, isto é, quando $\varphi(x,y) > 0$ para qualquer $(x,y) \neq (0,0)$, toda linha de nível $\varphi(x,y) = c$, com $c > 0$, é uma elipse. Com efeito, uma rotação adequada introduz (vide Seção 20) novos eixos ortogonais e novas coordenadas s, t tais que $\varphi(x,y) = A's^2 + B't^2$. Como φ é positiva, tem-se $A' > 0$ e $B' > 0$ logo a equação $A's^2 + B't^2 = c$, com $c > 0$, define uma elipse.

Analogamente se vê que se φ é negativa então as linhas de nível $\varphi(x,y) = c$, com $c < 0$, também são elipses.

Ainda o mesmo argumento mostra que quando φ é indefinida (isto é, assume valores positivos e valores negativos) então, para todo $c \neq 0$, a linha de nível $\varphi(x,y) = c$ é uma hipérbole.

Se φ é não-negativa mas não é positiva, isto é, se $\varphi(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mas existem pares $(x,y) \neq (0,0)$ tais que $\varphi(x,y) = 0$, então quando tomamos os eixos ortogonais (assegurados pela Seção 20) com os quais se tem $\varphi(x,y) = As^2 + Bt^2$, um dos números A, B deve ser positivo e o outro igual a zero. Noutras palavras, tem-se $\varphi(x,y) = As^2$ com $A > 0$ ou $\varphi(x,y) = Bt^2$ com $B > 0$. Portanto, para todo $c > 0$ a "linha" de nível $\varphi(x,y) = c$ é o par de retas paralelas $s = \pm\sqrt{c/A}$ ou $t = \pm\sqrt{c/B}$. Vale o resultado análogo para φ não-positiva.

A linha de nível $\varphi(x,y) = 0$ reduz-se a um ponto (a origem) quando φ é positiva ou negativa, a um par de retas que se cortam na origem se φ é indefinida e a uma única reta quando φ é não-negativa mas não é positiva (ou φ é não-positiva mas não é negativa. Se φ é não-negativa, a linha de nível $\varphi(x,y) = c$ com $c < 0$ é vazia e, se φ é não-positiva, também é vazia a linha de nível $\varphi(x,y) = c$ com $c > 0$).

As considerações acima significam que o método de completar o quadrado é bastante rápido e eficaz para determinar a natureza das linhas de nível de uma forma quadrática. Entretanto, deve ficar claro que seu uso não fornece imediatamente as informações contidas na Seção 20, como a direção e o comprimento dos eixos das elipses ou hipérboles definidas pela forma quadrática φ. A razão para isso é que, ao pormos $s = x + By/A$ e $c' = -\Delta/A$, temos $\varphi(x,y) = As^2 + c'y^2$ mas as coordenadas s, y não são relativas a um sistema de eixos ortogonais.

Exemplo 22.1 Sejam as formas quadráticas

$$\varphi_1(x,y) = x^2 + xy + y^2, \qquad \varphi_2(x,y) = x^2 + 3xy + 2y^2,$$
$$\varphi_3(x,y) = -x^2 + xy - y^2, \quad \varphi_4(x,y) = 2x^2 + 6xy + (9/2)y^2.$$

Completando os quadrados, podemos escrever:

$$\varphi_1(x,y) = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2, \qquad \varphi_2(x,y) = \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2,$$
$$\varphi_3(x,y) = -\left[\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2\right], \quad \varphi_4(x,y) = 2\left(x + \frac{3}{2}y\right)^2.$$

Logo φ_1 é positiva, φ_2 é indefinida, φ_3 é negativa e φ_4 é não-negativa.

Exercícios

1. Completando os quadrados, classifique as formas quadráticas abaixo segundo os sinais que assumem:

a) $3x^2 - 2xy + y^2$;

b) $2x^2 - 3xy + y^2$;

c) $-x^2 - 3xy - 2y^2$;

d) $2x^2 + 4\sqrt{3}xy + 6y^2$;

e) $3x^2 + 12xy + 12y^2$.

2. Se uma forma quadrática é positiva (respect. negativa), mostre que os coeficientes de x^2 e de y^2 são positivos (respect. negativos).

Esta afirmação continuaria verdadeira se substituíssemos a palavra "positiva" por "não-negativa"? (Mesma pergunta para "negativa".)

3. Supondo $x \neq 0$ e pondo $z = y/x$, a forma quadrática $\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ pode ser escrita como $\varphi(x, y) = x^2[Az^2 + 2Bz + C]$. Mostre então que as conclusões a que chegamos sobre o sinal de φ podem ser obtidas estudando o sinal do trinômio $Az^2 + 2Bz + C$. (Observe que se $x = 0$ e $y \neq 0$, podemos escrever $\varphi(x, y) = y^2[Aw^2 + 2Bw + C]$, com $w = \frac{x}{y}$.)

23

Transformações Lineares

Uma transformação linear leva vetores em vetores. Por simplicidade, fixaremos um sistema de coordenadas no plano. Assim, os vetores ficarão determinados por suas coordenadas e as transformações lineares serão definidas em $\mathbb{R}^2$, com valores em $\mathbb{R}^2$.

Transformação é sinônimo de função. Uma transformação $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ faz corresponder a cada vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ um vetor $Tv = T(x, y) \in \mathbb{R}^2$, chamado a *imagem* (ou o *transformado*) de v por T. As coordenadas de Tv são números que dependem das coordenadas x, y de v, portanto $Tv = T(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Assim, dar uma transformação $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é o mesmo que dar duas funções $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com valores numéricos, chamadas as *funções-coordenada* de T.

Exemplo 23.1 Dado o vetor $w = (a, b)$, a translação $T_w\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T_w(x, y) = (x + a, y + b)$ para todo $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, é uma transformação de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 23.2 As funções-coordenada de uma transformação podem ser tomadas arbitrariamente. Assim, por exemplo, se escolhermos $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $f(x, y) = \operatorname{sen} xy$ e $g(x, y) = x^2y + e^x$, teremos a transformação $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (\operatorname{sen} xy, x^2y + e^x)$. Entretanto, no que se segue, estudaremos transformações para as quais as funções-coordenada serão bem mais simples, como nos próximos exemplos.

Exemplo 23.3 (Rotação em torno da origem.) Fixado um ângulo θ, a rotação $R = R_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ faz corresponder a cada $v = (x, y)$ o vetor

$R\nu = (\overline{x}, \overline{y})$, de mesmo comprimento que ν, tal que o ângulo de ν para $R\nu$ é θ.

A fim de obter as equações que exprimem $\overline{x}$ e $\overline{y}$ em termos de x e y (isto é, as funções-coordenada de R), observamos que se α é o ângulo do eixo x com ν então $x = |\nu| \cos \alpha$, $y = |\nu|$ sen α. Por sua vez, o ângulo do eixo x com $R\nu$ é $\theta + \alpha$. Como o comprimento de $R\nu$ também é $|\nu|$, temos $\overline{x} = |\nu| \cos(\alpha + \theta)$, $\overline{y} = |\nu|$ sen $(\alpha + \beta)$.

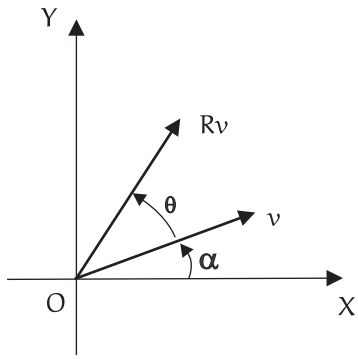


Figura 23.1 - A rotação de ângulo θ .

Fazendo uso das conhecidas fórmulas $\cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cdot \cos \theta -$ sen $\alpha \cdot$ sen θ e sen $(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cdot$ sen $\theta +$ sen $\alpha \cdot \cos \theta$, obtemos

$$\overline{x} = |\nu| \cos \alpha \cdot \cos \theta - |\nu| \text{ sen } \alpha \cdot \text{ sen } \theta = x \cos \theta - y \text{ sen } \theta,$$
$$\overline{y} = |\nu| \cos \alpha \cdot \text{ sen } \theta + |\nu| \text{ sen } \alpha \cdot \cos \theta = x \text{ sen } \theta + y \cos \theta.$$

Portanto, a rotação R de ângulo θ em torno da origem leva o vetor $\nu = (x, y)$ no vetor $R\nu = (\overline{x}, \overline{y})$, com

$$\overline{x} = x \cos \theta - y \text{ sen } \theta$$
$$\overline{y} = x \text{ sen } \theta + y \cos \theta.$$

Em particular, a rotação de 90^0 no sentido positivo leva o vetor $\nu = (x, y)$ no vetor $R\nu = (\overline{x}, \overline{y})$ com $\overline{x} = x \cos 90^0 - y \text{ sen } 90^0 = -y$ e $\overline{y} = x \text{ sen } 90^0 + y \cos 90^0 = x$, portanto $R\nu = (-y, x)$, confirmando o que já víramos antes.

Observação 23.1 Deve-se notar a analogia e, ao mesmo tempo, a diferença, entre as equações acima e aquelas da Seção 19, que se referem a mudança de coordenadas. Aqui, estamos mantendo fixos os

eixos e girando os vetores, enquanto lá os vetores ficavam fixos e os eixos se moviam. Lá, as equações exprimiam as novas coordenadas de um mesmo vetor em função das antigas; aqui elas exprimem as coordenadas do vetor Rv em termos das coordenadas de v. A interpretação anterior dessas equações pode ser chamada de *aliás* (outro nome) e esta agora de *alibi* (outro lugar).

Convém ainda observar que as equações acima podem ser invertidas, a fim de exprimir x e y em termos de $\overline{x}$ e $\overline{y}$. Isto pode ser feito algebricamente, como na Seção 19, ou simplesmente notando que v se obtém de Rv por uma rotação de ângulo $-\theta$. Como $\cos(-\theta) = \cos\theta$ e $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$, resulta que

$$\begin{aligned} x &= \overline{x}\cos\theta + \overline{y}\operatorname{sen}\theta \\ y &= -\overline{x}\operatorname{sen}\theta + \overline{y}\cos\theta. \end{aligned}$$

Exemplo 23.4 (Projeção ortogonal sobre uma reta que contém a origem.) Seja r a reta em $\mathbb{R}^2$ dada pela equação $y = ax$. A projeção ortogonal sobre r é a transformação $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que faz corresponder a todo $v = (x, y)$ o vetor $Pv = (\overline{x}, \overline{y})$, cuja extremidade é o pé da perpendicular baixada de v sobre a reta r. Então, na verdade, temos $\overline{y} = a\overline{x}$. Para obter as coordenadas de Pv em função das coordenadas de v, observamos que o Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo de vértices O, v e Pv nos dá:

$$x^2 + y^2 = \overline{x}^2 + a^2\overline{x}^2 + (x - \overline{x})^2 + (y - a\overline{x})^2.$$

Desenvolvendo e simplificando, obtemos

$$(1 + a^2)\overline{x} = x + ay.$$

Lembrando que $\overline{y} = a\overline{x}$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{1+a^2}x + \frac{a}{1+a^2}y, \\ \overline{y} &= \frac{a}{1+a^2}x + \frac{a^2}{1+a^2}y. \end{aligned}$$

Exemplo 23.5 (Reflexão em torno de uma reta r que contém a origem.) Esta transformação, também chamada a *simetria* de eixo r, é a correspondência $S = S_r\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que associa a cada $v = (x, y)$ seu

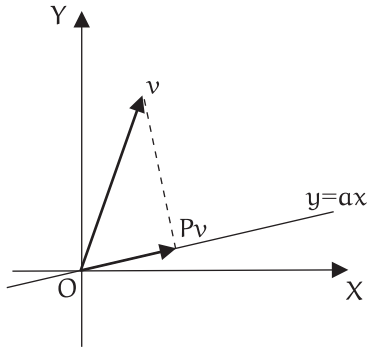


Figura 23.2 - Projetando o vetor v sobre a reta $y=ax$.

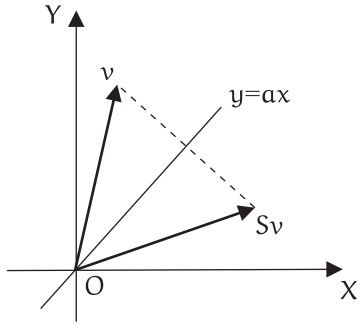


Figura 23.3 - Sv é o simétrico de v relativamente à reta $y=ax$.

simétrico $Sv = (\overline{x}, \overline{y})$ em relação a r. Isto significa que a reta r, dada pela equação $y = ax$, é a mediatriz do segmento de reta que liga v a Sv.

Noutras palavras, o ponto médio desse segmento de reta é a projeção Pv estudada no exemplo anterior. Assim $Pv = \frac{1}{2}(v + Sv)$ e daí $Sv = 2Pv - v$. Segue-se imediatamente que as equações que dão as coordenadas de $Sv = (\overline{x}, \overline{y})$ em termos das coordenadas de $v = (x, y)$ são

$$\overline{x} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}x + \frac{2a}{1 + a^2}y$$
$$\overline{y} = \frac{2a}{1 + a^2}x + \frac{a^2 - 1}{1 + a^2}y.$$

Podemos considerar estas duas igualdades como um sistema de equações com incógnitas x, y, sendo dados $\overline{x}$ e $\overline{y}$. Resolvendo-o, veremos que as expressões algébricas que fornecem x e y em função de $\overline{x}$ e $\overline{y}$ são exatamente as mesmas que dão $\overline{x}$ e $\overline{y}$ em termos de x e y. Mas não é necessário fazer cálculos para chegar a esta conclusão. Basta observar que se $Sv = (\overline{x}, \overline{y})$ é o simétrico de $v = (x, y)$ em relação ao eixo r então v também é o simétrico de Sv. Ou seja: $S(Sv) = v$.

Note que não tentamos inverter as equações da projeção P, vista no Exemplo 4. Isto não seria possível: por um lado, se $w = (\overline{x}, a\overline{x})$ existem infinitos vetores $v = (x, y)$ tais que $Pv = w$. (A saber, todos os que têm extremidade sobre a reta perpendicular a r passando por w.) E, por outro lado, se $w = (\overline{x}, \overline{y})$ com $\overline{y} \neq a\overline{x}$ não existe $v = (x, y)$ tal que $Pv = w$.

Diz-se então que a rotação R e a reflexão S são transformações *invertíveis* mas P não é.

Uma transformação $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ chama-se *linear* quando se têm números a, b, c, d tais que

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

para qualquer vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Os exemplos mais óbvios de transformações lineares são a *transformação identidade* $I\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e a *transformação nula* $0\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definidas por $I(x, y) = (x, y)$ e $O(x, y) = (0, 0)$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

No exemplo acima, a rotação R, a projeção P e a reflexão S são transformações lineares mas, exceto no caso trivial em que $w = (a, b)$ é o vetor zero, a translação $T_w\colon v \to v + w$ não é linear. Note que se $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é linear então $T(0, 0) = (0, 0)$, ou seja, o vetor nulo é transformado em si mesmo.

O quadro

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

chama-se *matriz* da transformação linear T. Os vetores-coluna (a, c) e (b, d) desta matriz são os transformados por T dos vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, que formam a chamada *base canônica* $\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$. Noutras palavras, tem-se $Te_1 = (a, c)$ e $Te_2 = (b, d)$.

Se $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear então, dados arbitrariamente $u, v \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se

$$T(u + v) = Tu + Tv \text{ e } T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot Tv. \qquad (*)$$

Com efeito, seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz de T. Se $u = (x, y)$ e $v = (x', y')$ então $u + v = (x + x', y + y')$ e $\alpha \cdot v = (\alpha x, \alpha y)$, logo

$$\begin{aligned} T(u + v) &= (a(x + x') + b(y + y'), c(x + x') + d(y + y')) \\ &= (ax + ax' + by + by', cx + cx' + dy + dy') \\ &= (ax + by, cx + dy) + (ax' + by', cx' + dy') \\ &= Tu + Tv, \\ T(\alpha \cdot v) &= (a \cdot \alpha x + b \cdot \alpha y, c \cdot \alpha x + d \cdot \alpha y) \\ &= (\alpha(ax + by), \alpha(cx + dy)) \\ &= \alpha \cdot (ax + by, cx + dy) = \alpha \cdot Tv. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação que satisfaz as condições (*) então T é linear. Com efeito, sejam $Te_1 = (a, c)$ e $Te_2 = (b, d)$. Então, dado qualquer $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos $v = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$, logo, em virtude de (*),

$$\begin{aligned} Tv = T(x \cdot e_1 + y \cdot e_2) &= T(x \cdot e_1) + T(y \cdot e_2) = x \cdot Te_1 + y \cdot Te_2 \\ &= x \cdot (a, c) + y \cdot (b, d) = (ax, cx) + (by, dy) \\ &= (ax + by, cx + dy), \end{aligned}$$

como queríamos provar.

Mostraremos agora como as propriedades da matriz $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ refletem propriedades da transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

Diz-se que a matriz $\mathbf{m}$ tem *posto zero* quando ela é a matriz nula, isto é, $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

O *posto* da matriz $\mathbf{m}$ diz-se *igual a* 1 quando $\mathbf{m}$ não é nula e seus vetores-coluna são colineares, ou seja, um deles é múltiplo do outro. Como sabemos, isto significa que $ad - bc = 0$ (e $\mathbf{m}$ não é nula). Esta igualdade, evidentemente, também significa que os vetores-linha de $\mathbf{m}$ são colineares.

Quando os vetores-coluna de $\mathbf{m}$ são não-colineares, ou seja, quando $ad - bc \neq 0$, diz-se que $\mathbf{m}$ é uma *matriz de posto* 2. (Então os vetores-linha de $\mathbf{m}$ também são não-colineares.)

Exemplo 23.6 A matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ tem posto 1 e a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ tem posto 2.

Se a matriz $\mathbf{m}$ da transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem posto zero então T é a transformação nula, isto é, transforma todo vetor $v \in \mathbb{R}^2$ no vetor zero.

Se a matriz $\mathbf{m}$ tem posto 1 então os transformados Tv dos vetores $v \in \mathbb{R}^2$ formam uma reta.

Com efeito, uma das colunas de $\mathbf{m}$, digamos a segunda, é um múltiplo da outra. Então $b = ka$, $d = kc$ para um certo $k \in \mathbb{R}$. Logo, seja qual for $v = (x, y)$, temos

$$\begin{aligned} Tv &= (ax + by, cx + dy) = (ax + kay, cx + kcy) \\ &= ((x + ky) \cdot a, (x + ky) \cdot c) = (ta, tc), \end{aligned}$$

com $t = x + ky$.

Portanto T transforma qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^2$ num vetor sobre a reta que passa pela origem e contém o vetor $w = (a, c)$. Todo ponto (ta, tc) desta reta é da forma Tv para algum $v \in \mathbb{R}^2$; basta tomar $v = te_1$, para ter $Tv = T \cdot te_1 = t \cdot (a, c) = (ta, tc)$.

Finalmente, se a matriz $\mathbf{m}$ tem posto 2 então as imagens Tv dos vetores $v \in \mathbb{R}^2$ preenchem todo o plano $\mathbb{R}^2$. Mais precisamente, neste caso, para todo $w = (m, n) \in \mathbb{R}^2$ existe um, e somente um, vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $Tv = w$.

Com efeito, dizer que $\mathbf{m}$ tem posto 2 significa afirmar que $ad - bc \neq 0$. Neste caso, para qualquer $w = (m, n)$ o sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ cx + dy &= n \end{aligned}$$

possui uma, e somente uma solução $v = (x, y)$, pois estas duas equações representam retas que têm um único ponto em comum (por serem perpendiculares aos vetores não-colineares (a, b) e (c, d)).

Exemplo 23.7 A projeção ortogonal P do Exemplo 23.4 é uma transformação linear de posto 1 pois os transformados Pv de todos os vetores $v \in \mathbb{R}^2$ estão sobre uma mesma reta. Note que o segundo vetor-coluna da matriz de P é realmente um múltiplo do primeiro. Já a rotação e a reflexão em torno de uma reta têm posto 2.

Se uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem posto 2 então ela é *invertível*. Como vimos antes, isto equivale a dizer que para todo $w \in \mathbb{R}^2$ existe um, e somente um, $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $Tv = w$.

Em particular, se T é invertível e $v \neq 0$ então $Tv \neq 0$ pois do contrário teríamos dois vetores distintos (v e 0) com a mesma imagem $0 = T0 = Tv$.

Exemplo 23.8 Dado um número $a \neq 0$, a transformação linear $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $H(x, y) = (ax, ay)$, tem matriz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, logo tem posto 2, ou seja, é invertível. Ela se chama a *homotetia* de centro O e razão a. Na notação vetorial, escrevemos $Hv = a \cdot v$. Segue-se que, para $u, v \in \mathbb{R}^2$ quaisquer, vale $|Hu - Hv| = |a \cdot u - a \cdot v| = |a| \cdot |u - v|$, ou seja, a distância de Hu a Hv é igual a $|a|$ vezes a distância de u a v. Segue-se daí que a homotetia H transforma a circunferência de centro v e raio r na circunferência de centro Hv e raio $|a| \cdot r$.

Segue-se também do fato de que H multiplica todas as distâncias pelo mesmo fator $|a|$ (e a partir da definição de elipse) que H transforma toda elipse noutra, com os eixos multiplicados por $|a|$.

Também uma rotação, uma reflexão (e mesmo uma translação, que não é linear) são transformações que levam circunferências em circunferências, (preservando o raio) e elipses em elipses (preservando o comprimento de cada eixo).

Exemplo 23.9 Em geral, uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ não leva necessariamente uma circunferência noutra circunferência. Isto é claro quando o posto de T é 0 ou 1. Mesmo se T tem posto 2, temos casos como o de T, definida por $T(x, y) = (x, 2y)$, que transforma a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ na elipse $s^2 + t^2/4 = 1$. Com efeito, se $T(x, y) = (s, t)$ então $x = s$ e $y = t/2$, logo a equação $x^2 + y^2 = 1$ equivale a $s^2 + t^2/4 = 1$.

Mostraremos, a seguir, que toda transformação linear invertível leva circunferências em elipses (entendendo-se uma circunferência como uma elipse com eixos iguais). O resultado crucial para esse propósito é o Teorema abaixo.

Teorema 1 *Para toda transformação linear* $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, existem vetores unitários ortogonais* u*,* v *que são transformados por* T *em vetores ortogonais* Tu*,* Tv*.*

Demonstração: Sejam $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^2$. Tomando $A = |Te_1|^2$, $B = \langle Te_1, Te_2 \rangle$ e $C = |Te_2|^2$,

introduzamos a forma quadrática $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pondo:

$$\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Usando a linearidade de T, vê-se imediatamente que, para todo $w = (x, y) = xe_1 + ye_2 \in \mathbb{R}^2$ tem-se $\varphi(x, y) = |Tw|^2$. Seja $u = (a, b)$ um autovetor unitário da forma quadrática φ. (Vide Seção 20.) Isto significa que, para um certo $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, (autovalor de φ) tem-se

$$\begin{aligned} Aa + Bb &= \lambda_1 a \\ Ba + Cb &= \lambda_1 b. \end{aligned}$$

Seja $v = (-b, a)$ obtido de u por rotação de 90^0. Afirmamos que $\langle Tu, Tv\rangle = 0$. Para mostrar isto, usaremos a identidade

$$2\langle Tu, Tv\rangle = |T(u + v)|^2 - |Tu|^2 - |Tv|^2.$$

Agora é só fazer as contas. Como $u + v = (a - b, a + b)$, temos

$$\begin{aligned} |T(u + v)|^2 &= \varphi(a - b, a + b) \\ &= A(a - b)^2 + 2B(a - b)(a + b) + C(a + b)^2, \\ |T(u)|^2 &= Aa^2 + 2Bab + Cb^2, \\ |T(v)|^2 &= Ab^2 - 2Bab + Ca^2. \end{aligned}$$

A identidade acima nos dá então (após cancelamentos óbvios):

$$\begin{aligned} \langle Tu, Tv\rangle &= Cab + Ba^2 - (Aab + Bb^2) \\ &= a(Cb + Ba) - b(Aa + Bb) \\ &= a \cdot \lambda_1 b - b \cdot \lambda_1 a = 0. \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração do Teorema 1.

Teorema 2 *Toda transformação linear invertível* $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *transforma a circunferência unitária* $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ *numa elipse*.

Demonstração: Sejam u, v vetores unitários tais que $\langle u, v\rangle = 0$ e $\langle Tu, Tv\rangle = 0$. Como T é invertível, tem-se $Tu \neq 0$ e $Tv \neq 0$. Todo vetor unitário w se escreve como $w = xu + yv$, onde $x^2 + y^2 = 1$. Sua imagem por T é $Tw = x \cdot Tu + y \cdot Tv$. Se adotarmos um sistema de

coordenadas com origem O, no qual os vetores unitários dos eixos são $Tu/|Tu|$ e $Tv/|Tv|$, as coordenadas de Tw nesse sistema serão $s = x \cdot |Tu|$ e $t = y \cdot |Tv|$. Segue-se que

$$\frac{s^2}{|Tu|^2} + \frac{t^2}{|Tv|^2} = x^2 + y^2 = 1.$$

Logo os vetores w pertencentes à circunferência unitária S^1 são transformados por T nos vetores Tw pertencentes à elipse que, neste novo sistema de coordenadas, tem a equação

$$\frac{s^2}{|Tu|^2} + \frac{t^2}{|Tv|^2} = 1.$$

Observação 23.2 Segue-se do Teorema 2 que uma transformação linear invertível $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leva *qualquer* circunferência Γ numa elipse. Com efeito, se Γ tiver centro na origem e raio r, sua imagem pela transformação T pode ser obtida mediante uma seqüência de três transformações: a homotetia de razão $1/r$, que leva Γ em S^1, a transformação T, que leva S^1 numa elipse e a homotetia de razão r, que transforma essa elipse noutra com eixos r vezes os anteriores.

Finalmente, se Γ é uma circunferência de raio r e centro w, usamos a igualdade $Tv = T(v - w) + Tw$ para ver que a imagem de Γ pela transformação T pode ser obtida transladando a elipse do caso anterior pelo vetor Tw.

Observação 23.3 Dada a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, com $Tv = (ax + by, cx + dy)$, para todo $v = (x, y)$, temos

$$|Tv|^2 = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

onde $A = a^2 + c^2$, $B = ab + cd$ e $C = b^2 + d^2$.

O maior valor de $|Tv|$ sujeito à restrição $|v| = 1$ é a raiz quadrada do maior valor de $|Tv|^2$, ou seja, da forma quadrática acima, quando $v = (x, y)$ pertence à circunferência unitária S^1, isto é, $x^2 + y^2 = 1$.

Como vimos no final da Seção 20, esse valor máximo é atingido quando o vetor unitário v é autovetor da matriz $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$, correspondente ao maior autovalor.

A Observação 23.3 permite determinar os eixos da elipse, imagem da circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$ pela transformação T.

Exemplo 23.10 A transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x,y) = (x-y, 2x+y)$, é invertível pois as colunas (e linhas) de sua matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ são linearmente independentes. Pelo teorema acima, T transforma a circunferência unitária $x^2+y^2=1$ na elipse $E = \{Tv;\ |v|=1\}$. O eixo maior de E é o segmento de reta que liga os seus dois pontos Tv_1 e $-Tv_1$, mais afastados da origem. Para obter v_1, consideramos a forma quadrática

$$\varphi(x,y) = |T(x,y)|^2 = (x-y)^2 + (2x+y)^2 = 5x^2 + 2xy + 2y^2,$$

cuja matriz é $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. A fim de determinar o maior valor de $\varphi(x,y)$ quando $x^2+y^2=1$, resolvemos a equação característica

$$\lambda^2 - 7\lambda + 9 = 0,$$

cujas raízes são (aproximadamente) $\lambda_1 = 5,3$ e $\lambda_2 = 1,7$. Os autovetores de φ correspondentes ao maior autovalor $\lambda_1 = 5,3$ são as soluções não-nulas $v = (x,y)$ do sistema indeterminado

$$\begin{aligned} 5x + y &= 5,3x \\ x + 2y &= 5,3y \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} -0,3x + y &= 0 \\ x - 3,3y &= 0. \end{aligned}$$

Tais autovetores têm a forma $v = (x; 0,3x)$. Um autovetor unitário relativo a λ_1 é $v_1 = (0,96; 0,29)$. O outro é $-v_1$. Portanto a circunferência unitária $x^2+y^2=1$ é transformada por T na elipse E, cujo eixo maior é o segmento de reta que liga os pontos

$$Tv_1 = (0,67; 2,21) \quad \text{e} \quad -Tv_1 = (-0,67; -2,21).$$

O eixo menor dessa elipse é o segmento de reta que liga os pontos Tv_2 e $-Tv_2$, onde v_2 é um autovalor unitário de φ relativo ao menor autovalor $\lambda_2 = 1,7$. Sabemos que v_2 é ortogonal a v_1, logo $v_2 = (-0,29; 0,96)$ e daí

$$Tv_2 = (-1,25; 0,38) \quad \text{e} \quad -Tv_2 = (1,25; -0,38).$$

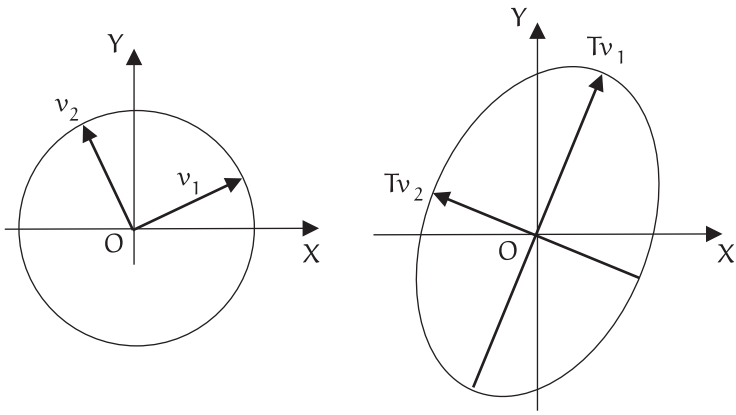


Figura 23.4 - A elipse é a imagem da circunferência unitária pela transformação linear T.

Exercícios

1. Seja $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma rotação em torno da origem. Use as equações que dão as coordenadas de Rv para mostrar que $\langle Ru, Rv\rangle = \langle u, v\rangle$ e $|Rv| = |v|$ para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$.

2. Se $m = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é a matriz de uma rotação em torno da origem, mostre que as colunas de m são vetores unitários ortogonais e o mesmo vale para as linhas.

3. Sejam r uma reta que contém a origem, α o ângulo de OX para r e $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão em torno de r. Sendo $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ mostre que o ângulo de e_1 para Se_1 é 2α e o ângulo de e_2 para Se_2 é $2\alpha + 180^0$. Conclua que $Se_1 = (\cos 2\alpha,\ \text{sen}\, 2\alpha)$ e $Se_2 = (\text{sen}\, 2\alpha, -\cos 2\alpha)$. A partir daí obtenha a matriz de S em termos de α.

4. Mostre que os resultados dos exercícios 1 e 2 também valem para a reflexão em torno de uma reta (no lugar de uma rotação).

5. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que consiste em aplicar uma rotação de ângulo θ e depois trocar o sinal da segunda coordenada. Mostre que T é a reflexão em torno de uma reta r que contém a origem e é tal que o ângulo de OX para r é $-\theta/2$.

6. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear invertível. Mostre que T transforma toda elipse noutra elipse (que pode ser uma circunferência), toda hipérbole noutra hipérbole e toda parábola noutra parábola.

7. Determine os eixos da elipse que é a imagem da circunferência unitária por cada uma das transformações lineares abaixo:

a) $T(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$

b) $T(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$

8. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x,y) = (4x+6y, 6x+9y)$. Mostre que todos os pontos da reta $2x + 3y = 1$ são transformados por T no mesmo ponto de $\mathbb{R}^2$. Qual é esse ponto?

9. Seja T como no exercício anterior. Prove que a circunferência $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ é transformada por T num segmento de reta. Quais são as extremidades desse segmento?

10. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear, de posto 1. Mostre que existe uma reta r, passando pela origem, a qual é transformada por T num único ponto e que todas as retas paralelas a r têm esta propriedade.

11. Uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de posto 2 transforma toda reta numa reta. Prove isto.

12. Use a fórmula $z = \frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u$ que dá a projeção ortogonal do vetor v sobre o vetor não-nulo u, para obter de outro modo as equações deduzidas no Exemplo 23.4.

13. Seja $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projeção ortogonal sobre a reta $y = ax + b$. Para todo $v = (x,y)$, determine as coordenadas do vetor Pv. Conclua que P não é uma transformação linear, salvo se $b = 0$.

14. Dada a transformação linear invertível $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sejam u, v vetores unitários ortogonais tais que o sentido da rotação de u para v seja positivo. Submeta o par (u,v) a um processo contínuo de rotação, no sentido positivo, mantendo sempre $u \perp v$, até u ocupar o lugar de v (e v o lugar de $-u$). Mostre que em algum momento tem-se $\langle Tu, Tv\rangle = 0$. (Argumento topológico para o Teorema 1.)

15. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear invertível. Mostre que T transforma retas paralelas em retas paralelas, portanto paralelogramos em paralelogramos. E losangos?

16. Qual é a área do paralelogramo no qual é transformado o quadrado $ABCD$, com $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$, $D = (0,1)$, pela transformação linear $T(x,y) = (2x+3y, 4x+5y)$?

17. Dados $u = (1,2)$, $v = (3,4)$, $u' = (5,6)$ e $v' = (7,8)$, ache uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Tu = u'$ e $Tv = v'$.

18. Três vetores u, v, w têm o mesmo comprimento e cada um deles forma com o seguinte um ângulo de 120^o. Se $u = (5,7)$, quais são as coordenadas de v e w?

19. Dada a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, com $T(x,y) = (3x+y,\ 2x+2y)$, dê exemplo de um vetor não-nulo v tal que $T \cdot v = v$. Determine todos os vetores $v = (x,y)$ com esta propriedade.

20. Seja $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projeção ortogonal sobre a reta $y = 3x$. Dado o vetor $u = (2,5)$, determine x de tal modo que, pondo $v = (x,10)$, tenha-se $Pv = Pu$.

21. Seja $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projeção ortogonal sobre a reta $y = ax$. Dado o vetor $v = (x,y)$, mostre que se tem $P \cdot v = 0$ se, e somente se, $y = \frac{-1}{a}x$. Se $w = (x',y')$, sob que condições tem-se $Pv = Pw$?

22. Qual é o simétrico do vetor $u = (2,5)$ em relação à reta $y = \frac{x}{2}$?

23. Sejam r e r' duas retas perpendiculares, ambas contendo a origem $0 = (0,0)$. Sejam $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S'\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ as transformações lineares que consistem nas reflexões em torno de r e r' respectivamente. Dado o vetor $v = (x, y)$, use as equações do Exemplo 23.5 para determinar $S' \cdot w$, onde $w = S \cdot v$.

24. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x, y) = (ax+by,\ cx+dy)$. A equação $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$ chama-se a *equação característica* da transformação T. As raízes desta equação (se existirem em $\mathbb{R}$) são chamadas os *autovalores* de T.

i) Mostre que o primeiro membro da equação característica é o determinante do sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= \lambda x \\ cx + dy &= \lambda y. \end{aligned}$$

ii) Conclua que λ é um autovalor de T se, e somente se, existe um vetor não-nulo v tal que $T \cdot v = \lambda \cdot v$.

iii) Mostre que se $b = c$ então T possui autovalores reais.

iv) Dada a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, onde $T(x, y) = (2x+y,\ x+2y)$, encontre vetores não-nulos u e v tais que $Tu = u$ e $Tv = 3v$.

25. Sabemos que $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (ax + by,\ cx + dy)$, tem posto 1 quando a, b, c, d não são todos iguais a zero e existe algum $k \in \mathbb{R}$ tal que $b = ka$ e $d = kc$, ou seja, quando sua matriz não é nula e tem a forma $\begin{bmatrix} a & ka \\ c & kc \end{bmatrix}$. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear de posto 1.

i) Prove que existe algum $v \neq 0$ tal que $T \cdot v = 0$.

ii) Prove que se o vetor $u \in \mathbb{R}$ é linearmente independente do v do item anterior, então $Tu \neq 0$.

iii) Prove que se $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem posto 1 então os vetores $v \in \mathbb{R}$ tais que $T \cdot v = 0$ formam uma reta contendo 0.

24

Coordenadas no Espaço

A introdução de coordenadas no espaço oferece não apenas um método para resolver problemas geométricos com os recursos da Álgebra como, reciprocamente, fornece uma interpretação geométrica valiosa para questões de natureza algébrica, como o estudo dos sistemas lineares.

Seja E o espaço euclidiano tridimensional, objeto de estudo da Geometria Espacial. Um *sistema de coordenadas* (cartesianas) em E consiste em três eixos OX, OY e OZ, com a mesma origem O, tais que qualquer um deles é perpendicular a cada um dos outros dois. O sistema é indicado com notação $OXYZ$.

Uma vez fixado o sistema $OXYZ$, chamaremos de Π_{xy}, Π_{yz} e Π_{xz} os planos determinados pelos eixos OX e OY, OY e OZ, OX e OZ, respectivamente.

A escolha do sistema $OXYZ$ faz com que se possa associar a cada ponto P do espaço um terno ordenado (x, y, z) de números reais, chamados as *coordenadas* do ponto P relativamente a esse sistema.

Para obter a coordenada x do ponto P, fazemos passar por esse ponto um plano Π, paralelo a Π_{yz}. A coordenada, no eixo OX, da interseção $\Pi \cap OX$ é o número x. Analogamente, y é a coordenada, no eixo OY, da interseção deste eixo com o plano Π', paralelo a Π_{xz}, passando por P. Finalmente, z é a coordenada, no eixo OZ, da interseção $\Pi'' \cap OZ$, onde Π'' é o plano paralelo a Π_{xy} passando por P.

As coordenadas (x, y, z) do ponto P no sistema $OXYZ$ podem também ser obtidas assim: a reta paralela ao eixo OZ passando pelo ponto P corta o plano Π_{xy} no ponto P_0. Sejam (x, y) as coordenadas de P_0 no sistema OXY do plano Π_{xy}. Estas são as duas primeiras coordenadas de P. Por

sua vez, a reta paralela ao eixo OX passando por P corta o plano Π_{yz} no ponto P_1. Sejam (y, z) as coordenadas de P_1 no sistema OYZ. O número y é o mesmo já obtido e z é a coordenada restante do ponto P.

Usa-se a notação $\mathbb{R}^3$ para representar o conjunto cujos elementos são os ternos ordenados (x, y, z) de números reais. O número x é a primeira coordenada do terno (x, y, z), y é a segunda coordenada e z é a terceira. Dois ternos (x, y, z) e (x', y', z') são iguais se, e somente se, $x = x'$, $y = y'$ e $z = z'$. Em particular, $(1, 2, 3)$ e $(1, 3, 2)$ são ternos diferentes.

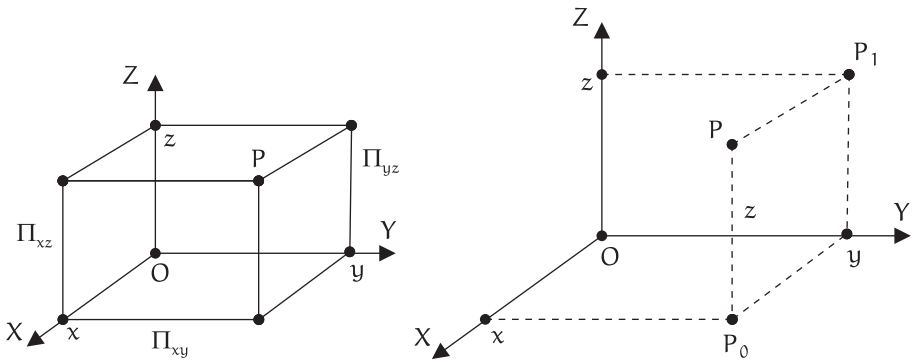


Figura 24.1 - As coordenadas x,y,z do ponto P.

O sistema OXYZ determina uma correspondência biunívoca $E \to \mathbb{R}^3$, que a cada ponto P do espaço associa o terno (x, y, z) de coordenadas desse ponto no sistema dado. Quando estiver claro o sistema OXYZ a que nos referimos, escreveremos $P = (x, y, z)$ para significar que x, y e z são as coordenadas do ponto P.

As coordenadas da origem O são $(0, 0, 0)$. Os pontos dos planos Π_{xy}, Π_{yz} e Π_{xz} têm coordenadas $(x, y, 0)$, $(0, y, z)$ e $(x, 0, z)$ respectivamente.

Um plano chama-se *vertical* quando contém o eixo OZ ou é paralelo a ele. Um plano diz-se *horizontal* quando é perpendicular ao eixo OZ. Todos os pontos de um plano horizontal têm coordenadas (x, y, c), onde a constante c é a coordenada, no eixo OZ, da interseção do plano dado com esse eixo. Diz-se então que $z = c$ é a equação do referido plano. De modo análogo, os planos perpendiculares aos eixos OX e OY têm equações do tipo $x = a$, $y = b$ respectivamente.

Evidentemente, um plano horizontal é paralelo a, ou coincide com,

o plano Π_{xy}.

Podemos também considerar no espaço euclidiano E sistemas de *eixos oblíquos*. Basta tomar três eixos OX, OY e OZ, com a mesma origem O, não situados os três no mesmo plano. Um tal sistema $OXYZ$ permite ainda associar a cada ponto P do espaço um terno (x, y, z) de coordenadas, de modo inteiramente análogo ao caso de eixos ortogonais. O número x é a coordenada, no eixo OX, do ponto de interseção desse eixo com o plano paralelo a Π_{yz}, tirado por P. As coordenadas y, z se definem de forma semelhante.

A preferência que damos aos sistemas de eixos ortogonais deve-se ao fato de que as coordenadas assim obtidas permitem um tratamento muito mais simples das noções ditas "métricas", como distâncias, ângulos e, em especial, perpendiculares. Por outro lado, questões relativas a colinearidade, coplanaridade e outras noções ditas "afins" às vezes são tratadas mais eficazmente por meio de eixos oblíquos convenientemente escolhidos.

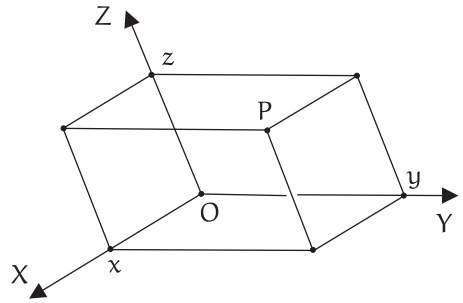


Figura 24.2 - Um sistema de eixos oblíquos.

As coordenadas acima consideradas são chamadas "retilíneas". Em algumas situações que ocorrem no Cálculo Infinitesimal, há conveniência de se introduzirem no espaço coordenadas "curvilíneas". As mais comuns são as coordenadas cilíndricas e as coordenadas esféricas, que não teremos ocasião de empregar aqui, por isso faremos delas apenas uma breve menção.

Suponhamos fixado um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço euclidiano E. Seja $P = (x, y, z)$ um ponto de E.

As *coordenadas cilíndricas* do ponto P são (r, θ, z), onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e θ é tal que $r \cdot \cos\theta = x$ e $r \cdot \operatorname{sen}\theta = y$. Como se vê, para os pon-

tos $P = (0, 0, z)$ do eixo OZ é indeterminada a coordenada θ e, para os demais pontos do espaço, a coordenada θ não é completamente determinada, podendo ser substituída por $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

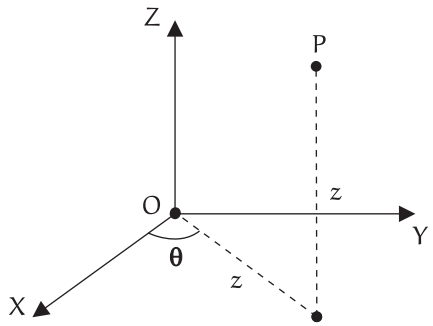


Figura 24.3 - As coordenadas cilíndricas do ponto P.

As *coordenadas esféricas* do ponto $P = (x, y, z)$ são (ρ, θ, φ), onde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, φ é o ângulo do eixo OZ para OP e θ é o ângulo do eixo OX para OP', onde $P' = (x, y, 0)$. Portanto, $x = \rho$ sen $\varphi \cos\theta$, $y = \rho$ sen φ sen θ, $z = \rho \cos\varphi$. A origem O não possui as coordenadas θ, φ e, nos demais pontos do espaço, as coordenadas θ, φ são determinadas apenas a menos de um múltiplo inteiro de 2π.

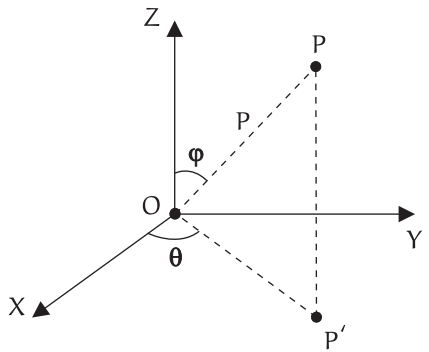


Figura 24.4 - As coordenadas esféricas do ponto P.

Exercícios

1. Dado um triângulo acutângulo ABC no espaço, mostre que é sempre possível escolher os eixos de modo que as coordenadas dos vértices sejam $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ e $C = (0, 0, c)$.

2. Assinale V(erdadeiro) ou F(also):

( ) Quando se usa o sistema de eixos $OXZY$ em vez de $OXYZ$, os planos horizontais se tornam verticais.

( ) Ao mudar do sistema $OXYZ$ para $OXZY$, os planos verticais passam a ser horizontais.

( ) Se os pontos $P = (x, y, z)$ pertencem todos a uma reta no espaço então os pontos $P' = (x, y, 0)$ estão sobre uma reta no plano Π_{xy}.

3. C é uma circunferência no espaço e o conjunto $C' = \{(x, y, 0);\ (x, y, z) \in C\}$ é uma circunferência no plano Π_{xy}. Se (x, y, z) e (x', y', z') pertencem a C, qual é a relação entre z e z'?

4. Identifique geometricamente os seguintes conjuntos:

a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z^2 + 2z = 3\}$

b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y\}$

c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x - 2z + 1)(3x - z - 2) = 0\}$

d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x^2 + y^2 + z^2)(x + y - 1) = 0\}$

e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1 \text{ e } |z| \leq 1\}$

f) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ xy = 1,\ x > 0,\ y > 0\}$

g) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y = z\}$

h) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = z^2\}$

i) $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x - z)^2 + (y - z)^2 \leq 1\}$

j) $J = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x - z)^2 + (y - z)^2 \leq 1\}$.

5. Escreva a equação do plano vertical que passa pelos pontos $P = (2, 3, 4)$ e $Q = (1, 1, 758)$.

6. Um plano vertical Π corta os eixos OX e OY nos pontos $A = (3, 0, 0)$ e $B = (0, -1, 0)$. Determine os coeficientes a, b, c, d de modo que um ponto $P = (x, y, z)$ pertença a Π se, e somente se, $ax + by + cz = d$.

7. Escreva a equação geral de um plano vertical.

25

As Equações Paramétricas de uma Reta

Se $P = (x, y, z)$ são as coordenadas relativas ao sistema $OXYZ$ no espaço então as coordenadas, no sistema OXY, da projeção ortogonal P_0 do ponto P sobre o plano Π_{xy} e da projeção P_1 do mesmo ponto P sobre o plano Π_{yz} são $P_0 = (x, y)$ e $P_1 = (y, z)$, respectivamente.

Seja r a reta do espaço passando pelos pontos $A = (a, b, c)$ e $A' = (a', b', c')$. Sua projeção ortogonal sobre o plano Π_{xy} é a reta r_0 que passa pelos pontos $A_0 = (a, b)$ e $A'_0 = (a', b')$, cujas coordenadas são referentes ao sistema OXY. As equações paramétricas da reta r_0 são

$$x = a + t(a' - a), \quad y = b + t(b' - b).$$

Analogamente, as equações paramétricas da reta r_1, projeção ortogonal de r sobre o plano Π_{yz}, são

$$y = b + t(b' - b), \quad z = c + t(c' - c).$$

Ora, o ponto $P = (x, y, z)$ pertence a r se, e somente se, $P_0 = (x, y)$ pertence a r_0 e $P_1 = (y, z)$ pertence a r_1. Logo (x, y, z) pertence a r se, e somente se,

$$\begin{aligned} x &= a + t(a' - a), \\ y &= b + t(b' - b) \quad \text{e} \\ z &= c + t(c' - c), \quad \text{onde } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

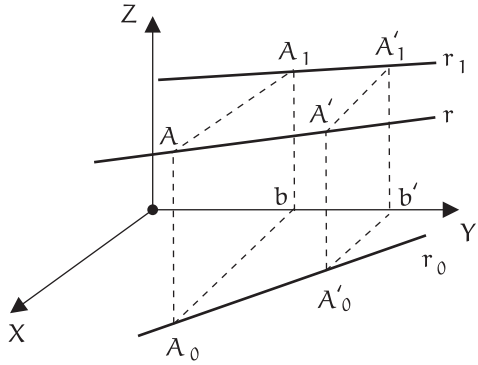


Figura 25.1 - Obtendo as equações paramétricas da reta r.

Estas são, portanto, equações paramétricas da reta que contém os pontos $A = (a, b, c)$ e $A' = (a', b', c')$. Quando t varia de 0 a 1, o ponto $P = (x, y, z)$, cujas coordenadas são dadas pelas equações acima, descreve o segmento de reta AA'. Quanto $t < 0$, A se situa entre P e A'. Finalmente, quando $t > 1$, tem-se A' entre A e P.

No caso particular da reta OA, que passa pela origem e pelo ponto $A = (a, b, c)$, suas equações paramétricas assumem a forma mais simples $x = ta$, $y = tb$, $z = tc$, ou seja, seus pontos são $P = (ta, tb, tc)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observação e exemplo. Quando se deseja caracterizar analiticamente os pontos de uma reta no espaço, tem-se duas opções: ou as equações paramétricas daquela reta ou o sistema de duas equações com três incógnitas, representando dois planos cuja interseção é a reta dada, conforme veremos logo adiante. Salvo em circunstâncias muito especiais, as equações paramétricas são mais convenientes, principalmente quando se quer encontrar a interseção da reta com uma superfície, pois tem-se apenas que determinar o valor do parâmetro t de modo que o ponto satisfaça a equação da superfície. Por exemplo: qual a interseção da reta que passa pelos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $A' = (4, 5, 6)$ com o plano horizontal cuja equação é $z = -1$?

As equações paramétricas da reta AA' são

$$x = 1 + 3t, \quad y = 2 + 3t, \quad z = 3 + 3t.$$

Para que um ponto desta reta esteja sobre o plano $z = -1$, deve-se ter

$3 + 3t = -1$, ou seja, $t = -4/3$. Então $x = 1 + 3t = 1 + 3(-4/3) = -3$, $y = 2 + 3t = 2 + 3(-4/3) = -2$ e $z = -1$. O ponto procurado é $P = (-3, -2, -1)$.

Exercícios

1. Obtenha equações paramétricas para a reta AB, onde:

a) $A = (2, 3, 4)$ e $B = (5, 6, 7)$

b) $A = (-3, 1, 2)$ e $B = (6, 0, -2)$

c) $A = (2, 5, 1)$ e $B = (3, 5, 1)$

2. Mostre que as equações paramétricas

$$x = 1 + 2t,\ y = 2 + 6t,\ z = 3 + 4t,\ t \in \mathbb{R} \quad \text{e}$$
$$\overline{x} = 2 + s,\ \overline{y} = 5 + 3s,\ z = 5 + 2s,\ s \in \mathbb{R}$$

definem a mesma reta.

3. Sejam AB e CD retas sem pontos em comum. Prove que elas são reversas se, e somente se, $AC \cap BD = \varnothing$ e $AD \cap BC = \varnothing$.

4. Prove que as duas retas, dadas pelas equações paramétricas $x = -1 + 2t$, $y = 2 - 3t$, $z = -3 + t$ e $\overline{x} = 1 + s$, $\overline{y} = 2 - s$, $\overline{z} = 3 + 2s$, não têm ponto em comum nem são paralelas. São, portanto, retas reversas.

5. Sejam $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (1, 1, 0)$ e $D = (0, 0, 1)$. Mostre que as retas AB e CD têm um ponto em comum, o qual pertence também à reta EF, onde $E = (1, 0, 0)$ e $F = (0, 1, 1)$. Interprete este resultado geometricamente.

6. Dados $A = (1, 2, 3)$ e $B = (4, 5, 6)$, determine os pontos em que a reta AB corta os planos Π_{xy}, Π_{xz} e Π_{yz}.

7. Sejam $A = (3, 5, 2)$ e $B = (-1, -1, 4)$, $C = (2, 1, 5)$ e $D = (0, 3, 1)$. Mostre que as retas AB e CD têm um ponto em comum e determine este ponto P. Decida se P pertence a um dos segmentos de reta AB e CD.

8. Dados $A = (3, 5, 2)$ e $B = (-1, -1, 4)$ escreva equações paramétricas para a reta paralela a AB passando pelo ponto $C = (2, 1, 5)$.

9. Se $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, -1, 4)$, $C = (2, 3, -1)$ e $D = (3, 1, 3)$, mostre que as retas AB e CD são reversas.

10. Sejam Π e Π' os planos verticais definidos pelas equações $2x + 3y = 6$ e $5x - 2y = 10$ respectivamente. Dados os pontos $A = (3, 2, -1)$ e $B = (-3, 7, 1)$, ache os pontos em que a reta AB corta esses planos.

26

Distância entre Dois Pontos no Espaço

Observamos inicialmente que se, num determinado sistema OXYZ, os pontos $P = (a, b, z)$ e $Q = (a, b, z')$ têm as duas primeiras coordenadas iguais então $d(P, Q) = |z - z'|$ pois esta é a distância entre dois pontos no eixo formado por todos os pontos (a, b, z), $z \in \mathbb{R}$. Um resultado análogo vale, evidentemente, para a primeira e terceira, ou para a segunda e terceira coordenadas.

Dados $P = (x, y, z)$ e $P' = (x', y', z')$, consideremos os pontos auxiliares $Q = (x, y, z')$ e $R = (x, y', z')$. O Teorema de Pitágoras, aplicado aos triângulos retângulos PQP' e QRP', nos dá, sucessivamente:

$$d(P, P')^2 = d(P, Q)^2 + d(Q, P')^2 = d(P, Q)^2 + d(Q, R)^2 + d(R, P')^2.$$

Como (P, Q), (Q, R) e (R, P') são pares de pontos com duas coordenadas iguais, resulta da observação inicial que

$$d(P, P')^2 = (z - z')^2 + (y - y')^2 + (x - x')^2 \tag{26.1}$$

logo

$$d(P, P') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \tag{26.2}$$

Observação 26.1 Pode ocorrer, é claro, que um (ou cada um) dos triângulos retângulos acima se reduza a um segumento como, por exemplo, quando $Q = P$. Nestes casos, o Teorema de Pitágoras se reduz a uma igualdade banal.

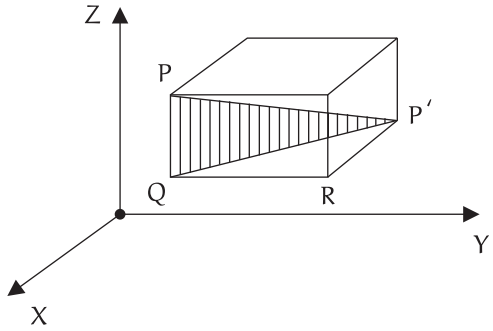


Figura 26.1 - Calculando a distância de P a P'.

A distância do ponto $P = (x, y, z)$ à origem $O = (0, 0, 0)$ é dada por

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Exemplo 26.1 A fórmula da distância entre dois pontos no espaço tem como conseqüência imediata a equação da esfera. Como se sabe, a esfera S de centro no ponto $A = (a, b, c)$ e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ situados à distância r do centro A. Portanto o ponto de coordenadas x, y, z pertence à esfera S se, e somente se

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

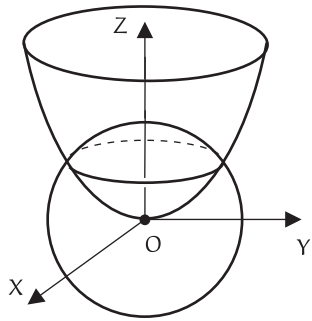


Figura 26.2 - Interseção de esfera e parabolóide.

Em particular a equação da esfera de centro na origem $O = (0, 0, 0)$ e raio r é:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Exemplo 26.2 A superfície T, formada pelos pontos $P = (x, y, z)$ tais que $z = x^2 + y^2$, é chamada um *parabolóide de revolução*. Seja S a esfera de centro na origem e raio 1, isto é, o conjunto dos pontos (x, y, z) tais que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Mostremos que a interseção $S \cap T$ é uma circunferência contida num plano horizontal, com centro sobre o eixo OZ. Com efeito, se o ponto $P = (x, y, z)$ pertence a $S \cap T$ então temos simultaneamente

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{e} \quad z = x^2 + y^2,$$

logo

$$z^2 + z = 1,$$

ou seja

$$z^2 + z - 1 = 0.$$

As raízes desta equação são

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Mas $z = x^2 + y^2 > 0$, portanto os pontos da interseção da esfera com o parabolóide têm todos a coordenada z igual a $(-1 + \sqrt{5})/2 = c$ e as outras duas coordenadas x e y cumprem $x^2+y^2 = c$, portanto pertencem à circunferência de centro no ponto $(0, 0, c)$ e raio $\sqrt{c}$, situada no plano $z = c$.

Exemplo 26.3 Quando se tem uma questão geométrica, em cujo enunciado não ocorre explicitamente um sistema de eixos, e queremos tratá-la usando coordenadas, temos a liberdade de escolher nosso sistema de eixos ortogonais da forma que julgarmos mais conveniente. Vejamos um exemplo bem simples para ilustrar esse ponto. São dados dois pontos distintos A e B no espaço. Indaga-se que forma tem o conjunto dos pontos equidistantes de A e B. Noutras palavras, escrevendo $X = \{P;\ d(P, A) = d(P, B)\}$, pergunta-se que forma tem o conjunto X. Evidentemente, o ponto médio O do segmento AB pertence a X. Tomamos então um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ cuja origem seja O e cujo eixo OX contenha o segmento AB. Temos então $A = (a, 0, 0)$ e $B = (-a, 0, 0)$, com $a \neq 0$. Um ponto $P = (x, y, z)$ é equidistante de A e B se, e somente se, $d(P, A)^2 = d(P, B)^2$, isto é

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = (x + a)^2 + y^2 + z^2.$$

Simplificando, esta equação reduz-se a $4ax = 0$. Como $a \neq 0$, concluímos que o ponto $P = (x, y, z)$ é equidistante de A e B se, e somente se, $x = 0$. Portanto, o conjunto X dos pontos equidistantes de A e B é o plano Π_{yz}. Como o enunciado do problema não fazia referência a coordenadas, respondemos simplesmente que o conjunto X é um plano, mais precisamente, é o plano perpendicular ao segmento AB, que passa pelo ponto médio desse segmento.

Exercícios

1. Seja $N = (0, 0, 1)$ o pólo norte da esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Para cada ponto $P = (x, y, z)$ diferente de N em S^2 (isto é, com $z \neq 1$), seja $P' = (x', y', 0)$ o ponto em que a semi-reta $\overrightarrow{NP}$ intersecta o plano Π_{xy}. Use as equações paramétricas de NP para obter as coordenadas x' e y' em função de x, y e z.

2. Com as notações do exercício anterior, dado o ponto $P' = (x', y', 0)$ em Π_{xy}, obtenha as coordenadas do ponto $P = (x, y, z)$ no qual a semi-reta $\overrightarrow{NP'}$ intersecta a esfera unitária S^2.

3. Escolhendo o sistema de eixos adequado, mostre que, dados dois pontos A e B, o conjunto dos pontos P do espaço tais que $d(P, A)^2 - d(P, B)^2 = c$ (uma constante) é um plano perpendicular à reta AB.

4. Mostre que se a equação $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$ representa uma esfera então $A = B = C \neq 0$ e $D = E = F = 0$. E reciprocamente, se estas condições são cumpridas, a equação dada representa uma esfera, um ponto ou o conjunto vazio.

5. Complete os quadrados e decida para quais valores de k a equação $x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y + 3z + k = 0$ define um ponto, uma esfera ou o conjunto vazio.

6. Determine a interseção da esfera $x^2+y^2+z^2 = 8$ com o conjunto $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$. Esboce geometricamente a situação.

27

Segmentos de Reta no Espaço

Discutiremos aqui alguns fatos básicos sobre segmentos de reta, tomando como referência as coordenadas dos seus pontos extremos.

Inicialmente, como no caso do plano, caracterizaremos o perpendicularismo dos segmentos OA e OA', onde $A = (a, b, c)$ e $A' = (a', b', c')$.

O ângulo $A\hat{O}A'$ é reto se, e somente se, vale

$$d(A, A')^2 = d(O, A)^2 + d(O, A')^2,$$

ou seja

$$(a - a')^2 + (b - b')^2 + (c - c')^2 = a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2,$$

isto é:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2 - 2(aa' + bb' + cc') \\ = a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2. \end{aligned}$$

Simplificando, obtemos a relação

$$aa' + bb' + cc' = 0,$$

que fornece a condição necessária e suficiente para que sejam perpendiculares os segmentos OA e OA', onde $A = (a, b, c)$ e $A' = (a', b', c')$.

Em seguida, usaremos a fórmula da distância entre dois pontos para obter as coordenadas do ponto que divide o segmento AA' numa

razão dada. Sabemos que os pontos do segmento de reta AA' são $X_t = (x_t, y_t, z_t)$, onde $0 \leq t \leq 1$ e

$$\begin{aligned} x_t &= a + t(a' - a) \\ y_t &= b + t(b' - b) \\ z_t &= c + t(c' - c). \end{aligned}$$

Destas igualdades resulta, por um cálculo simples, que

$$\frac{d(A, X_t)}{d(A, A')} = \frac{\sqrt{(x_t - a)^2 + (y_t - b)^2 + (z_t - c)^2}}{\sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2}} = t.$$

Portanto X_t é, para todo $t \in [0, 1]$, o ponto do segmento de reta AA' tal que $d(A, X_t)/d(A, A') = t$.

Em particular, tomando $t = 1/2$ obtemos as coordenadas do ponto médio de AA':

$$M = X_{1/2} = \left(\frac{a + a'}{2}, \frac{b + b'}{2}, \frac{c + c'}{2} \right).$$

Conhecendo as coordenadas do ponto médio de um segmento, podemos responder a seguinte pergunta: dados $A = (a, b, c)$, $A' = (a', b', c')$ e o ponto $P = (m, n, p)$ fora da reta AA', quais são as coordenadas do ponto $P' = (x, y, z)$ tal que AA' e PP' são lados opostos de um paralelogramo?

De saída, observamos que a pergunta acima admite duas respostas possíveis. Numa delas, AP e $A'P'$ também formam um par de lados opostos do paralelogramo; na outra, AP e $A'P'$ são diagonais.

Escrevamos $\alpha = a' - a$, $\beta = b' - b$ e $\gamma = c' - c$. Queremos determinar $P' = (x, y, z)$ de modo que tanto AA' e PP' como AP e $A'P'$ sejam pares de lados opostos de um mesmo paralelogramo. Então AP' e $A'P$ são as diagonais, logo seus pontos médios coincidem. Daí resulta que

$$\frac{a + x}{2} = \frac{a' + m}{2}, \quad \frac{b + y}{2} = \frac{b' + n}{2}, \quad \frac{c + z}{2} = \frac{c' + p}{2},$$

portanto $x = m + (a' - a)$, $y = n + (b' - b)$, $z = p + (c' - c)$, ou seja,

$$x = m + \alpha, \quad y = n + \beta, \quad z = p + \gamma.$$

Como no caso do plano, diremos que os segmentos de reta orientados AA' e PP' são *equipolentes* quando eles:

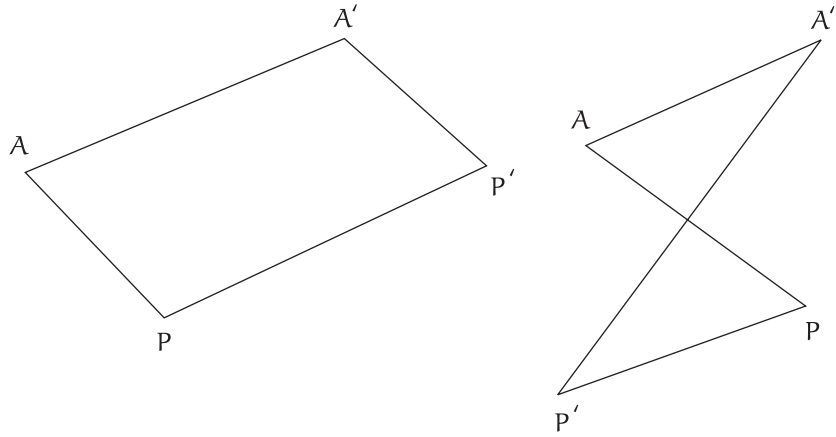


Figura 27.1 - Situações diferentes em que AA' e PP' são lados opostos de um paralelogramo.

1. Têm o mesmo comprimento, isto é, $d(A, A') = d(P, P')$;
2. São paralelos ou colineares;
3. Têm o mesmo sentido.

Novamente aqui as condições 1) e 2) são claras. A condição 3) significa, no caso em que AA' e PP' são paralelos, que eles são lados opostos de um paralelogramo do qual os outros dois lados opostos são AP e $A'P'$. No caso em que AA' e PP' estão sobre a mesma reta, dizer que estes segmentos orientados têm o mesmo sentido significa que uma das semi-retas AA' e PP' está contida na outra.

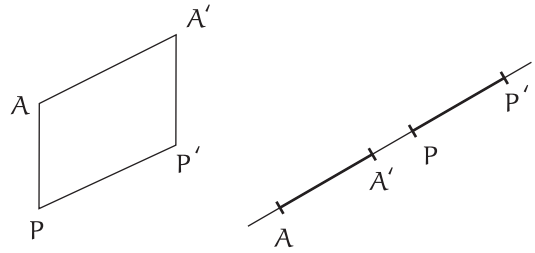


Figura 27.2 - Segmentos orientados equipolentes: paralelos ou colineares.

Como o paralelogramo é o único quadrilátero cujas diagonais se cortam mutuamente ao meio, podemos enunciar: *A fim de que os segmentos de reta orientados* AA' *e* PP' *sejam equipolentes é necessário e suficiente que os segmentos* AP' *e* $A'P$ *tenham o mesmo ponto médio.*

Portanto, se $A = (a, b, c)$, $A' = (a', b', c')$, $P = (m, n, p)$ e $P' = (m', n', p')$, temos AA' e PP' equipolentes se, e somente se,

$$a' - a = m' - m, \quad b' - b = n' - n \quad \text{e} \quad c' - c = p' - p.$$

Se escrevermos $\alpha = a' - a$, $\beta = b' - b$ e $\gamma = c' - c$, veremos que $Q = (\alpha, \beta, \gamma)$ é o único ponto do espaço tal que o segmento de reta orientado OQ é equipolente a AA'.

Em Geometria Espacial, diz-se que os segmentos de reta AB e CD são *ortogonais* quando tomando-se, a partir de um ponto O, os segmentos OP e OQ, respectivamente paralelos a AB e CD, o ângulo $P\hat{O}Q$ é reto. Reserva-se a denominação *perpendiculares* para o caso em que os segmentos dados têm um ponto em comum.

Estabeleçamos agora a condição para que sejam ortogonais os segmentos AA' e PP', onde $A = (a, b, c)$, $A' = (a', b', c')$, $P = (m, n, p)$ e $P' = (m', n', p')$.

Como acabamos de ver, se pusermos $A'' = (a' - a, b' - b, c' - c)$ e $P'' = (m' - m, n' - n, p' - p)$, os segmentos de reta OA'' e OP'' são paralelos respectivamente a AA' e PP'. Logo estes últimos são ortogonais se, e somente se OA'' e OP'' são perpendiculares, isto é, se

$$(a' - a)(m' - m) + (b' - b)(n' - n) + (c' - c)(p' - p) = 0.$$

Exercícios

1. Verifique que $A = (0, a/2, 0)$, $B = (0, -a/2, 0)$, $C = (0, 0, a\sqrt{3}/2)$ e $D = (a\sqrt{6}/3, 0, a\sqrt{3}/6)$ são os vértices de um tetraedro regular $ABCD$. Em seguida mostre que duas arestas opostas quaisquer como, por exemplo, AC e BD, são ortogonais.
2. Dados os pontos distintos $A = (a, b, c)$, $A' = (a', b', c')$ e o número $d > 0$, mostre que existem, na reta AA', 0, 1 ou 2 pontos P tais que $d(O, P) = d$. Se existir exatamente um ponto P com $d(O, P) = d$, mostre que os segmentos de reta OP e AA' são ortogonais.
3. Ache quatro pontos A, B, C e D no espaço, cujas coordenadas sejam 1 ou 0, de modo que $ABCD$ seja um tetraedro regular. Verifique que duas arestas opostas desse tetraedro são ortogonais.

4. Se os segmentos orientados AA' e BB' são equipolentes, prove que também são equipolentes os segmentos orientados AB e $A'B'$.

5. Se os pontos A e B são equidistantes da origem e os segmentos orientados OA e BC são equipolentes, prove que OC e AB são perpendiculares.

6. Seja AA' uma diagonal de um cubo e sejam B, C e D os vértices desse cubo que estão mais próximos de A. Mostre que AA' é perpendicular a BC e BD e conclua que AA' é perpendicular ao plano BCD. Mostre ainda que se AA' corta o plano BCD no ponto P então $d(A, P) = \frac{1}{3}d(A, A')$.

28

Vetores no Espaço

Quando os segmentos orientados AA' e PP' no espaço E são equipolentes, escrevemos $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PP'}$ e dizemos que eles representam o mesmo *vetor* $v = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PP'}$.

Dado o sistema de coordenadas $OXYZ$, com $A = (a, b, c)$, $A' = (a', b', c')$, $P = (m, n, p)$ e $P' = (m', n', p')$, tem-se $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PP'} = v$ se, e somente se, $a' - a = m' - m$, $b' - b = n' - n$ e $c' - c = p' - p$. Pondo $\alpha = a' - a$, $\beta = b' - b$ e $\gamma = c' - c$, escreve-se $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ e diz-se que estas são as coordenadas do vetor $v = \overrightarrow{AA'}$ no sistema $OXYZ$.

Se $v = \overrightarrow{AA'}$ é um vetor e P é um ponto arbitrário do espaço, existe um único ponto P' tal que $\overrightarrow{PP'} = v$. Como vimos na seção anterior, quando $P = (x, y, z)$ e $v = (\alpha, \beta, \gamma)$, tem-se $P' = (x + \alpha, y + \beta, z + \gamma)$.

Escreve-se $P' = P + v$ para significar que $\overrightarrow{PP'} = v$ e diz-se que o vetor v transporta o ponto P para a posição P'. Fixado o vetor v, tem-se então a função $T_v : E \to E$, chamada a *translação* definida por v, onde $T_v(P) = P + v$ para todo $P \in E$.

A translação $T_v : E \to E$ não apenas transforma cada ponto $P \in E$ no ponto P' tal que $\overrightarrow{PP'} = v$ mas opera também sobre uma figura qualquer $F \subset E$, transformando-a na figura $F + v = \{P + v; P \in F\}$, que se diz transladada de F por V. (Veja figura 14.3, na Seção 14.)

Como no caso do plano, é conveniente introduzir o *vetor nulo* $0 = \overrightarrow{AA}$, representado por um segmento de reta degenerado, com ponto inicial igual ao final. Ele é indicado pelo mesmo símbolo 0 que se usa para representar o número zero. Para todo ponto P do espaço tem-se $\overrightarrow{PP} = 0$. Em relação a qualquer sistema, as coordenadas do vetor nulo

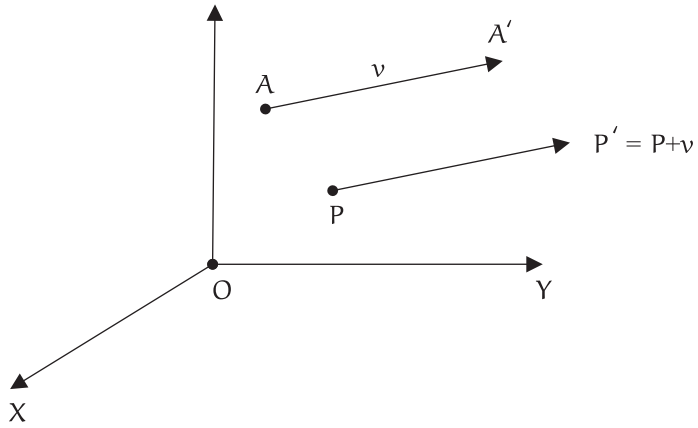


Figura 28.1 - $v = (\alpha, \beta, \gamma)$, $P = (x, y, z) \Rightarrow P+v = (x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)$.

são $0 = (0, 0, 0)$. A translação $T_0 \colon E \to E$, determinada por esse vetor, é simplesmente a função identidade.

A adição de vetores e o produto de um vetor por um número real se definem no espaço exatamente do mesmo modo que no plano. Em relação a um sistema de coordenadas OXYZ, se $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $v' = (\alpha', \beta', \gamma')$ então

$$v + v' = (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma') \quad \text{e}$$

$$\lambda v = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma).$$

Se $v = \overrightarrow{AB}$ então o vetor $-v = \overrightarrow{BA}$, chamado o *simétrico*, ou *oposto* de v tem a propriedade de que $-v+v = v+(-v) = 0$, por isso se diz que $-v$ é o *inverso aditivo* de v. Se $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ então $-v = (-\alpha, -\beta, -\gamma)$.

Valem as propriedades formais $v+w = w+v$, $(u+v)+w = u+(v+w)$, $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$ e $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.

Quanto ao *produto interno* $\langle v, w\rangle$, é mais conveniente começar com a definição

$$\langle v, w\rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma',$$

onde $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $w = (\alpha', \beta', \gamma')$ são as coordenadas desses vetores com respeito a um sistema de coordenadas OXYZ arbitrariamente fixado.

Desta definição resulta imediatamente que

$$\begin{aligned}&\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle,\\ &\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \quad \text{e}\\ &\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle,\end{aligned}$$

para quaisquer vetores u, v, w e qualquer número real λ.

Além disso, como vimos na seção anterior, os vetores v e w são ortogonais, (ou seja, pondo $v = \overrightarrow{OA}$ e $w = \overrightarrow{OB}$, os segmentos OA e OB são perpendiculares) se, e somente se, $\langle v, w\rangle = 0$.

O símbolo $|v|$ indica o *comprimento* do vetor v, isto é, o comprimento de qualquer segmento AA' tal que $v = \overrightarrow{AA'}$. Portanto, se $v = (\alpha, \beta, \gamma)$, tem-se

$$|v| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Se $|v| = 1$, diz-se que v é um vetor *unitário*.

Se os vetores v e w são ambos diferentes do vetor nulo, escrevendo $v = \overrightarrow{OA}$ e $w = \overrightarrow{OB}$, os segmentos OA e OB formam um ângulo que pode ser agudo, reto ou obtuso, logo seu cosseno, que chamaremos $\cos\theta$, pode ser positivo, nulo ou negativo.

Mostraremos agora que a definição acima dada para o produto interno $\langle v, w\rangle$ equivale a dizer que, quando $v \neq 0$ e $w \neq 0$, tem-se

$$\langle v, w\rangle = |v||w|\cos\theta. \qquad (*)$$

Observe-se que a definição $\langle v, w\rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$, que demos acima, aparentemente é o produto interno de v e w relativamente ao sistema de coordenadas $OXYZ$. Se tomássemos outro sistema, as coordenadas de v e w seriam outras e nada garantiria, a priori, que o valor do produto interno $\langle v, w\rangle$ se manteria o mesmo.

Mas, se provarmos que $\langle v, w\rangle = |v||w|\cos\theta$, veremos que o produto interno independe do sistema de coordenadas tomado, pois os comprimentos $|v|$ e $|w|$, bem como o ângulo θ, não têm nada a ver com coordenadas: são noções geométricas intrínsecas.

Suponhamos inicialmente que $|v| = |w| = 1$.

Sejam $v = \overrightarrow{OA}$ e $w = \overrightarrow{OB}$. Consideremos um vetor unitário $v^* = \overrightarrow{OA^*}$, com $OA^* \perp OA$ e A^* no mesmo plano que O, A e B. Então, pela definição de seno e de cosseno, pondo $v^* = \overrightarrow{OA^*}$, temos:

$$w = \cos\theta \cdot v + \ \text{sen}\ \theta \cdot v^*.$$

Como v e v^* são ortogonais, seu produto interno é $\langle v, v^* \rangle = 0$. Assim, se tomarmos o produto interno de ambos os membros da igualdade acima por v e usarmos as regras $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ e $\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$ obteremos

$$\langle v, w \rangle = \cos \theta.$$

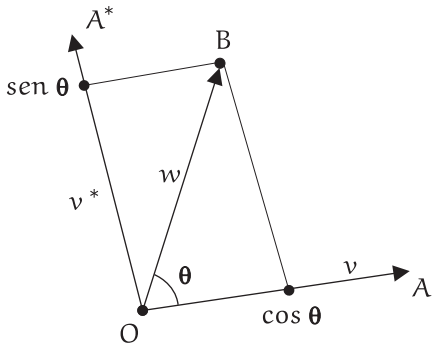


Figura 28.2 - Como $v = \overrightarrow{OA}$ e $v^* = \overrightarrow{OA^*}$ são unitários e ortogonais, tem-se $w = \cos \quad v + \operatorname{sen} \theta \cdot w$.

Portanto a igualdade (*) é verdadeira quando u e v são vetores unitários.

Sejam agora v e w vetores não-nulos quaisquer. Pondo $v' = (1/|v|) \cdot v$ e $w' = (1/|w|) \cdot w$, os vetores v' e w' são unitários, com $v = |v|v'$ e $w = |w|w'$. Então, como o ângulo entre v' e w' é θ, vem:

$$\langle v, w \rangle = \langle |v|v', |w|w' \rangle = |v||w| \langle v', w' \rangle = |v||w| \cos \theta.$$

A igualdade (*) está provada em todos os casos. Dela resulta que se θ é um dos ângulos formados por duas retas AB e AC que têm o ponto A em comum então

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{|v||w|}, \quad \text{onde} \quad v = \overrightarrow{AB} \text{ e } w = \overrightarrow{AC}.$$

Como observamos no capítulo anterior, duas retas que se cortam no ponto A formam quatro ângulos, que são dois a dois iguais ou suplementares, logo seus cossenos têm o mesmo valor absoluto. Se considerarmos as retas dadas como orientadas, digamos de A para B e de A

para C então o ângulo entre elas está bem determinado; ele pode ser agudo, reto ou obtuso e seu cosseno vale $\langle v, w\rangle/|v||w|$, sinal incluído.

Exemplo 28.1 Sejam B o pé da perpendicular baixada do ponto A sobre o plano Π e C o pé da perpendicular baixada de B sobre a reta r, contida em Π. O "teorema das três perpendiculares" diz que AC é perpendicular à reta r. Para provar este fato usando o produto interno de vetores, ponhamos $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{BC}$, donde $u + v = \overrightarrow{AC}$. Tomando sobre r um ponto D, diferente de C, escrevamos $w = \overrightarrow{CD}$. As hipóteses feitas asseguram que $\langle u, w\rangle = 0$ e $\langle v, w\rangle = 0$. Somando estas igualdades membro a membro, vem: $\langle u + v, w\rangle = 0$, donde AC é perpendicular a CD, isto é, a r.

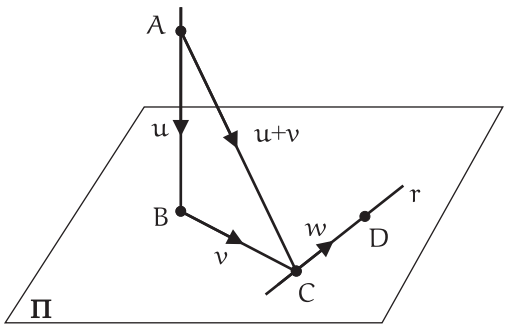


Figura 28.3 - O Teorema das três perpendiculares: a reta AC é perpendicular à reta r.

Vimos na Seção 15 que se dois vetores u, v num plano são não-colineares então todo vetor w desse plano se escreve como combinação linear $w = xu + yv$, com os números x, y univocamente determinados (a partir de u, v e w).

Estenderemos agora esse resultado para o espaço tridimensional.

Diremos que os vetores u, v, w são *coplanares* quando, escrevendo-os sob a forma $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ e $w = \overrightarrow{AD}$ (com a mesma origem A), os pontos A, B, C e D estiverem no mesmo plano.

Quando u, v e w são coplanares, ou os três são colineares ou um deles está no plano determinado pelos outros dois. Em qualquer caso, um deles é combinação linear dos outros dois.

Se os vetores u, v, w são não-coplanares, então nenhum deles é combinação linear dos outros dois. Diz-se então que eles são *linearmente independentes* (L.I.).

Teorema 28.1 *Se* a, b, c *são vetores linearmente independentes então todo vetor* d *do espaço se exprime, de modo único, como combinação linear* $d = x \cdot a + y \cdot b + z \cdot c$.

Demonstração: Tomemos no espaço um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ de modo que $a = \overrightarrow{OA}$ e $b = \overrightarrow{OB}$, onde A pertence ao eixo OX e B pertence ao plano Π_{xy}. Então as coordenadas dos vetores dados são

$$a = (a_1, 0, 0), \quad b = (b_1, b_2, 0), \quad c = (c_1, c_2, c_3) \quad \text{e } d = (d_1, d_2, d_3).$$

Queremos encontrar números x, y, z tais que $d = x \cdot a + y \cdot b + z \cdot c$. Esta igualdade vetorial equivale às três igualdades numéricas

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ b_2y + c_2z &= d_2 \\ c_3z &= d_3. \end{aligned}$$

Como os vetores a, b e c não são coplanares, temos $a_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ e $c_3 \neq 0$. A última equação acima nos dá $z = d_3/c_3$. Entrando com este valor de z na segunda equação, obtemos $y = (c_3d_2 - c_2d_3)/b_2c_3$. Finalmente, substituindo y e z por estes valores na primeira equação e levando em conta que $a_1 \neq 0$, obtemos x.

Observação. Como na Seção 15, o teorema acima pode ser demonstrado geometricamente. Isso é um dos exercícios propostos a seguir.

Exercícios

1. Sem usar coordenadas, explique o significado das seguintes afirmações: (a) os vetores u, v são ortogonais; (b) o vetor v é ortogonal à reta r; (c) o vetor v é ortogonal ao plano Π; (d) os vetores u e v são colineares; (e) os vetores u, v, w são coplanares.
2. Dados $u = (\alpha, \beta, \gamma)$, $v = (\alpha', \beta', \gamma')$ e $w = (\beta\gamma' - \gamma\beta', \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \alpha\beta' - \beta\alpha')$, calcule os produtos internos $\langle u, w\rangle$ e $\langle v, w\rangle$. Que relação entre u e v implica $w = 0$?

3. Seja $u = (a, b, c)$ um vetor unitário, com $abc \neq 0$. Determine o valor de t de modo que, pondo $v = (-bt, at, 0)$ e $w = (act, bct, -1/t)$, os vetores u, v e w sejam unitários e mutuamente ortogonais. A condição $abc \neq 0$ pode ser omitida?

4. Sejam A um ponto e u, v vetores não-colineares no espaço. Mostre que o conjunto $\Pi = \{A + su + tv;\ s, t \in \mathbb{R}\}$ é um plano.

5. Diz-se que o vetor v é *combinação linear* dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ quando se tem $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Mostre que os vetores u, v e w são coplanares se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros dois.

6. Se os vetores u, v e w não são coplanares, mostre geometricamente que todo vetor do espaço se exprime como combinação linear $\alpha u + \beta v + \gamma w$.

7. Dados quatro vetores no espaço, prove que um deles é combinação linear dos outros três.

8. Dados os números $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, mostre que se tem a desigualdade $(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$, valendo a igualdade se, e somente se, existe k tal que $\alpha = ka$, $\beta = kb$ e $\gamma = kc$. (Exclua os casos triviais $a = b = c = 0$ ou $\alpha = \beta = \gamma = 0$.)

9. Sejam v_1, v_2 e v_3 vetores não-coplanares. Se o vetor w é tal que $\langle w, v_1 \rangle = \langle w, v_2 \rangle = \langle w, v_3 \rangle = 0$, prove que $w = 0$.

10. Calcule o cosseno do ângulo formado por duas diagonais de um cubo.

11. Determine quais dos seguintes conjuntos é tal que nenhum dos seus vetores é combinação linear dos outros dois:

a) $\{(1, -1, 2), (1, 1, 0), (1, -1, 1)\}$

b) $\{(2, 1, 2), (1, -1, 1), (5, 4, 2)\}$

c) $\{(1, 0, -2), (2, -1, 2), (4, -3, 10)\}$

d) $\{(1, -1, 1), (-1, 2, 1), (-1, 2, 2)\}$.

12. Sejam $r_1 = \{A + s \cdot v;\ s \in \mathbb{R}\}$ e $r_2 = \{B + t \cdot w;\ t \in \mathbb{R}\}$ duas retas:

(i) Prove que $r_1 = r_2$ se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e w são múltiplos de v.

(ii) Prove que r_1 e r_2 são coplanares se, e somente se, os vetores v, w e $\overrightarrow{AB}$ são linearmente dependentes (isto é, um deles é combinação linear dos outros dois).

(iii) Prove que r_1 e r_2 são paralelas se, e somente se, w é múltiplo de v mas não de $\overrightarrow{AB}$.

(iv) Prove que r_1 e r_2 são retas reversas (isto é, não estão contidas num mesmo plano) se, e somente se, os vetores v, w e $\overrightarrow{AB}$ são linearmente independentes.

29

Equação do Plano

No espaço E, onde se escolheu um sistema de coordenadas $OXYZ$, seja Π um plano. Tomemos a reta OA, que passa pela origem, pelo ponto $A = (a, b, c)$ e é perpendicular ao plano Π.

Afirmamos que existe um número real d tal que a equação do plano Π é

$$ax + by + cz = d,$$

isto é, o ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano Π se, e somente se, suas coordenadas satisfazem a relação acima.

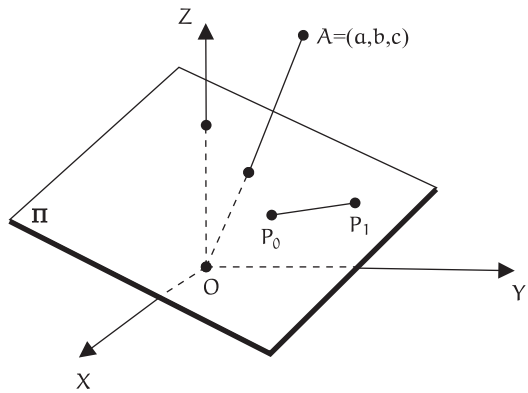


Figura 29.1 - Se A=(a,b,c), a reta OA é perpendicular ao plano de equação ax+by+cz = d.

Com efeito, se tomarmos dois pontos arbitrários $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e

$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ no plano Π, o segmento P_0P_1 é ortogonal a OA, ou seja, tem-se

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0, \quad \text{logo} \tag{29.1}$$

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = ax_0 + by_0 + cz_0. \tag{29.2}$$

Portanto, a expressão $ax+by+cz$ assume um valor constante para todo ponto $P = (x, y, z)$ em Π. Este valor é o que chamamos de d. Assim,

$$P = (x, y, z) \in \Pi \Rightarrow ax + by + cz = d.$$

Reciprocamente, se as coordenadas do ponto $P = (x, y, z)$ satisfazem a relação $ax + by + cz = d$ então, tomando $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Pi$ tem-se, como acabamos de ver, $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$ e, por subtração vem

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

ou seja, o segmento PP_0 é ortogonal a OA. Portanto $P \in \Pi$.

Conclusão: $P = (x, y, z)$ pertence ao plano Π se, e somente se,

$$ax + by + cz = d.$$

Se o plano Π contém a origem O, sua equação é satisfeita quando $x = y = z = 0$, logo $d = 0$ e a equação de Π tem a forma $ax + by + cz = 0$.

Para que a reta OA seja determinada, deve-se ter $A \neq 0$, logo as coordenadas do ponto $A = (a, b, c)$ não podem ser todas iguais a zero. Portanto, sempre que nos referirmos à equação $ax + by + cz = d$ como equação de um plano, fica tacitamente admitido que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Discutiremos agora quando é que duas equações definem o mesmo plano, planos paralelos ou planos concorrentes.

Seja qual for a número real $k \neq 0$, as equações $ax + by + cz = d$ e $kax + kby + kcz = kd$ definem o mesmo plano. Reciprocamente, se as equações $ax + by + cz = d$ e $a'x + b'y + c'z = d'$ definem o mesmo plano [isto é, têm as mesmas soluções (x, y, z)] então existe $k \neq 0$ tal que $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$ e $d' = kd$.

Para provar esta última afirmação, observemos que, sendo os segmentos OA e OA', com $A = (a, b, c)$ e $A' = (a', b', c')$, ambos perpendiculares ao plano Π, definido pelas duas equações, o ponto A' pertence à reta OA (cujas equações paramétricas são $x = ta$, $y = tb$, $z = tc$)

logo $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' = kc$, com $k \neq 0$ pois $A' \neq 0$. Além disso, tomando um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ em Π temos

$$d' = a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 = kax_0 + kby_0 + kcz_0 = k(ax_0 + by_0 + cz_0) = kd.$$

A fim de que os planos Π e Π', definidos pelas equações

$$ax + by + cz = d \text{ e } a'x + b'y + c'z = d', \qquad (*)$$

sejam paralelos (isto é, não tenham pontos em comum) é necessário e suficiente que, para algum $k \neq 0$, se tenha $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$ e $d' \neq kd$.

Com efeito, se estas relações são satisfeitas então

$$\begin{aligned} P = (x, y, z) \in \Pi &\Rightarrow ax + by + cz = d \\ &\Rightarrow kax + kby + kcz = kd \\ &\Rightarrow a'x + b'y + c'z = kd \neq d' \\ &\Rightarrow P \notin \Pi'. \end{aligned}$$

Logo as condições $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$, $d' \neq kd$ implicam que os planos Π e Π' são paralelos. Reciprocamente, se os planos Π e Π', definidos pelas equações (*), são paralelos então os segmentos OA e OA', perpendiculares a esses planos, são colineares, logo, para algum $k \neq 0$ tem-se $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' = kc$. Mas deve ser necessariamente $d' \neq kd$ pois do contrário as equações (*) definiriam o mesmo plano e teríamos $\Pi = \Pi'$.

Completando a discussão, resta uma última possibilidade: a fim de que os planos Π e Π', definidos pelas equações

$$ax + by + cz = d \quad \text{e} \quad a'x + b'y + c'z = d', \qquad (*)$$

não coincidam nem sejam paralelos (portanto se intersectem segundo uma reta) é necessário e suficiente que para nenhum $k \in \mathbb{R}$ (o qual é necessariamente $\neq 0$ pois os coeficientes da equação de um plano não podem ser todos nulos) se tenha $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' = kc$.

Noutras palavras, os planos Π e Π', definidos por estas equações, têm uma reta em comum se, e somente se, os vetores não-nulos $v = (a, b, c)$ e $v' = (a', b', c')$ não são múltiplos um do outro.

Isto nos dá outra maneira de representar analiticamente uma reta no espaço. Além de ser descrita por suas equações paramétricas, como

vimos na Seção 7, a reta r pode ser caracterizada como o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ cujas coordenadas são as soluções do sistema de equações (*), onde os vetores $v = (a, b, c)$ e $v' = (a', b', c')$ não são múltiplos um do outro. Examinaremos mais detidamente a questão do paralelismo ou interseção de planos quando estudarmos sistemas lineares.

Exemplo 29.1 A reta definida pelo par de equações $x + 2y + 3z = 6$, $4x+5y+6z = 15$ contém os pontos $(0, 3, 0)$ e $(1, 1, 1)$ logo suas equações paramétricas são $x = t$, $y = 3 - 2t$, $z = t$.

Deduziremos agora a fórmula da distância de um ponto a um plano.

Inicialmente consideremos o plano Π, definido pela equação $ax + by + cz = d$, e o plano Π', dado pela equação $ax + by + cz = d'$, com o mesmo primeiro membro. Eles são paralelos se $d \neq d'$ e coincidem quando $d = d'$. Qual é a distância entre esses planos?

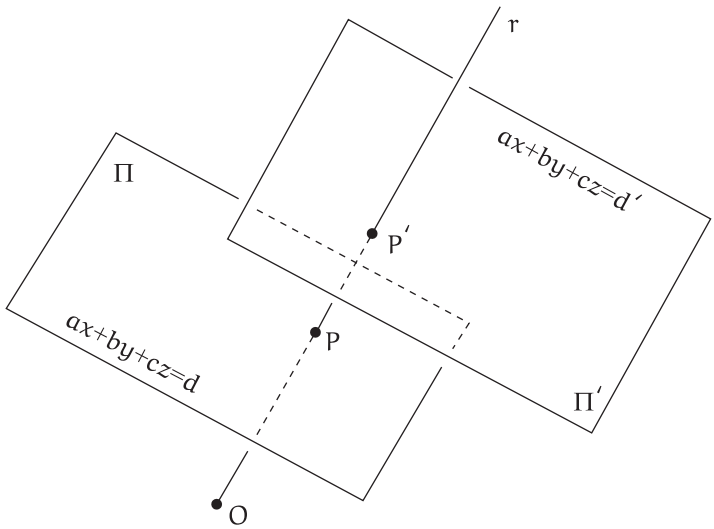


Figura 29.2 - d(P, P') é a distância entre os dois planos paralelos Π e Π'.

A reta $r = \{(at, bt, ct);\ t \in \mathbb{R}\}$, que passa pela origem, é perpendicular aos planos Π e Π' e os intersecta nos pontos P e P' respectivamente. A distância entre os planos Π e Π' é igual à distância entre os pontos $P = (ta, tb, tc)$ e $P' = (t'a, t'b, t'c)$. Devemos portanto determinar os

valores de t e t'. Como $P \in \Pi$, temos

$$a(ta) + b(tb) + c(tc) = d, \quad \text{donde} \quad t = \frac{d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Analogamente, $t' = d'/(a^2 + b^2 + c^2)$. Daí decorre facilmente que

$$d(P', P) = \frac{|d' - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Em seguida, determinemos a distância do ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ ao plano Π, dado pela equação $ax + by + cz = d$. Se escrevermos $d_0 = ax_0 + by_0 + cz_0$, veremos que o ponto P_0 pertence ao plano Π_0, paralelo a (ou coincidente com) Π, definido pela equação $ax + by + cz = d_0$. Além disso, a distância $d(P_0, \Pi)$ de P_0 ao plano Π é igual à distância entre os planos Π_0 e Π. Portanto

$$d(P_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exemplo 29.2 A distância da origem ao plano $ax + by + cz = d$ é igual a $|d|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Exercícios

1. Seja X um conjunto no espaço que contém pelo menos dois pontos. Suponha que X tem a seguinte propriedade: a reta que une dois pontos quaisquer de X está contida inteiramente em X. Prove que X é uma reta, um plano ou o espaço todo.
2. Obtenha uma equação para o plano que contém o ponto P e é perpendicular ao segmento de reta AB nos seguintes casos:
   a) $P = (0, 0, 0)$, $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, -1, 2)$;
   b) $P = (1, 1, -1)$, $A = (3, 5, 2)$, $B = (7, 1, 12)$;
   c) $P = (3, 3, 3)$, $A = (2, 2, 2)$, $B = (4, 4, 4)$;
   d) $P = (x_0, y_0, z_0)$, $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$.
3. Sejam $A = (3, 1, 3)$, $B = (5, 5, 5)$, $C = (5, 1, -2)$ e $D = (8, 3, -6)$. Mostre que as retas AB e CD são concorrentes e ache uma equação para o plano que as contém.
4. Sejam $A = (-1, 1, 2)$, $B = (2, 3, 5)$ e $C = (1, 3, -2)$. Obtenha uma equação para o plano que contém a reta AB e o ponto C.

5. Supondo $abc \neq 0$, escreva a equação do plano que corta os eixos OX, OY e OZ nos pontos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ e $(0, 0, c)$ respectivamente.

6. Dados os pontos $A = (1, 1, 2)$, $B = (1, 2, 3)$ e $C = (-1, 2, 1)$, obtenha as coordenadas de um ponto P tal que o segmento OP seja perpendicular ao plano ABC. Use as coordenadas de P para achar uma equação do tipo $ax+by+cz = d$ para esse plano.

7. Resolva o exercício anterior escrevendo, por meio de equações, a condição para que cada um dos pontos A, B e C pertença ao plano $ax + by + cz = d$.

8. Escrevendo as equações paramétricas das retas r e r' sob a forma vetorial, tem-se $r = \{A + sv;\ s \in \mathbb{R}\}$ e $r' = \{A' + tv';\ t \in \mathbb{R}\}$. Estabeleça condições sobre os pontos A, A' e os vetores v, v' a fim de que essas retas (a) coincidam; (b) sejam paralelas; (c) sejam reversas; (d) sejam coplanares.

9. Sejam AB e CD retas paralelas. Ache uma equação para o plano determinado por elas.

10. Qual é a equação do plano tangente, no ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$, à esfera com centro $A = (a, b, c)$ e raio r?

11. O plano Π contém o ponto $A = (a, b, c)$ e a distância da origem a Π é $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Ache uma equação desse plano.

12. Qual é o simétrico do ponto $P = (3, 7, 0)$ em relação ao plano $x + 2y - z = 5$?

13. Ache as coordenadas do ponto do plano $2x+y-2z = 12$ que está mais próximo da origem.

14. O plano Π tem a seguinte propriedade: se $P, Q \in \Pi$ e $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$ então $R \in \Pi$. Prove que Π contém a origem O.

15. Existe um plano que passa pela origem e contém o ponto $P = (x+2y+3z, -2x+y-z, -x+8y+7z)$, sejam quais forem os valores atribuídos a x, y e z. Ache a equação desse plano.

16. Qual é o ponto do plano $2x - 3y + z = 5$ mais próximo do ponto $P = (1, 3, 1)$?

17. Escreva as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $P = (1, 2, 3)$ e é perpendicular ao plano $x - 3y + 2z = 1$.

30

Sistemas de Equações Lineares com Duas Incógnitas

Salvo menção explícita em contrário, fica convencionado que, ao escrevermos uma equação $ax + by = c$, estaremos admitindo tacitamente que $a^2 + b^2 \neq 0$, isto é, que os coeficientes a e b não se anulam simultaneamente.

Uma *solução* do sistema linear

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \qquad (*)$$

é um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas x, y satisfazem ambas equações. O sistema (*) se diz indeterminado, impossível ou determinado quando admite mais de uma solução, nenhuma solução ou uma única solução respectivamente. Como sabemos, cada equação em (*) tem como soluções as coordenadas (x, y) dos pontos de uma reta, de modo que o sistema é indeterminado, impossível ou determinado, conforme as retas r_1 e r_2, representadas pelas duas equações, coincidam, sejam paralelas ou sejam concorrentes respectivamente.

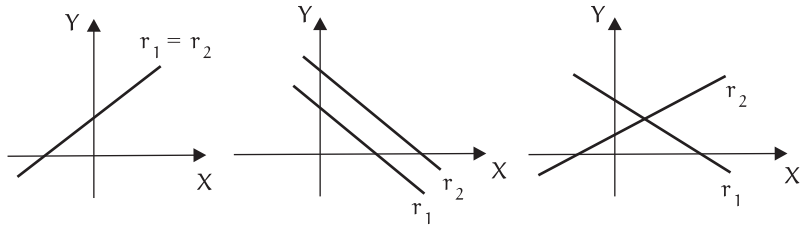


Figura 30.1 - Sistemas com duas incógnitas: indeterminado, impossível e determinado.

Para decidir em qual dessas três alternativas se enquadra o sistema (*), devemos examinar os quadros dos coeficientes

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Eles são exemplos de *matrizes*: $\mathbf{m}$ é uma matriz quadrada, com duas linhas e duas colunas, ou seja, uma matriz 2×2. Suas linhas são os vetores $l_1 = (a_1, b_1)$ e $l_2 = (a_2, b_2)$, e suas colunas são os vetores $v = (a_1, a_2)$, $w = (b_1, b_2)$, todos em $\mathbb{R}^2$. Já $\mathbf{M}$ tem duas linhas e três colunas; é uma matriz 2×3. Suas linhas são os vetores $L_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $L_2 = (a_2, b_2, c_2)$, em $\mathbb{R}^3$, enquanto suas colunas são os vetores $u = (a_1, a_2)$, $v = (b_1, b_2)$ e $w = (c_1, c_2)$, pertencentes a $\mathbb{R}^2$. Diz-se que $\mathbf{m}$ é a *matriz* e $\mathbf{M}$ é a *matriz aumentada* do sistema (*).

Duas retas que possuem mais de um ponto em comum devem coincidir. Logo o sistema (*) é indeterminado se, e somente se, suas equações definem a mesma reta.

Sabemos que isto ocorre se, e somente se, existe um número $k \neq 0$ tal que $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$ e $c_2 = kc_1$, isto é, os vetores-linha $L_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $L_2 = (a_2, b_2, c_2)$ da matriz $\mathbf{M}$ são colineares (múltiplos um do outro). Uma forma de exprimir esta condição sem referência ao número k consiste em dizer que

$$a_1b_2 - a_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = b_1c_2 - b_2c_1 = 0.$$

O sistema (*) é impossível quando as retas $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$ são paralelas. Para que isto aconteça, como sabemos, é necessário e suficiente que exista $k \neq 0$ com $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$ e $c_2 \neq kc_1$. Equivalentemente, o sistema (*) é impossível se, e somente se $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ mas pelo menos um dos números $a_1c_2 - c_1a_2$, $b_1c_2 - c_1b_2$ é diferente de zero.

O número $a_1b_2 - b_1a_2$ chama-se o *determinante* da matriz

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

do sistema.

Finalmente, o sistema (*) é determinado quando não é indeterminado nem impossível. Isto ocorre quando as retas $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$ são concorrentes, ou seja, quando o determinante $a_1b_2 - a_2b_1$ é diferente de zero. Dito de outro modo: quando os vetores-linha $\ell_1 = (a_1, b_1)$ e $\ell_2 = (a_2, b_2)$ da matriz $\mathbf{m}$ não são múltiplos um do outro.

Diz-se que um vetor w é *combinação linear* dos vetores u e v quando existem números x, y tais que $w = xu + yv$.

O sistema (*), que foi analisado acima sob o ponto de vista de suas linhas, pode também ser olhado em termos das colunas $u = (a_1, a_2)$, $v = (b_1, b_2)$, $w = (c_1, c_2)$ de sua matriz aumentada. Sob este ângulo, afirmar que (x, y) é uma solução do sistema equivale a dizer que $w = xu + yv$. Portanto, o sistema possui solução se, e somente se, w é combinação linear dos vetores u e v.

Resulta, então, da discussão acima que se esses vetores $u = (a_1, a_2)$ e $v = (b_1, b_2)$ são tais que a $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ então qualquer vetor $w = (c_1, c_2)$ em $\mathbb{R}^2$ se exprime (de modo único) como combinação linear deles. Neste caso (isto é, quando u e v não são múltiplos um do outro) diz-se que os vetores u e v são *linearmente independentes*.

Dois sistemas dizem-se *equivalentes* quando admitem as mesmas soluções. Quando se substitui uma das equações do sistema pela soma desta equação com um múltiplo da outra, obtém-se um sistema equivalente. Noutras palavras, para todo $k \in \mathbb{R}$, os dois sistemas abaixo possuem as mesmas soluções:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y & = c_1 \\ (a_2 + ka_1)x + (b_2 + kb_1)y & = c_2 + kc_1. \end{cases}$$

Para resolver o sistema pelo *método da eliminação*, escolhe-se o número k de modo que um dos coeficientes $a_2 + ka_1$ ou $b_2 + kb_1$ seja zero. Isto dá imediatamente o valor de uma das incógnitas, o qual é substituído na primeira equação para encontrar o outro valor.

Sob o ponto de vista geométrico, quando $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ as retas $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$ se cortam num certo ponto (x_0, y_0).

Para qualquer número k, pondo $a_3 = a_1 + ka_2$, $b_3 = b_1 + kb_2$ e $c_3 = c_1 + kc_2$, a reta $a_3x + b_3y = c_3$ ainda passa pelo ponto (x_0, y_0). Escolher k de modo a anular um dos coeficientes a_3 ou b_3 equivale a obter a reta $a_3x + b_3y = c_3$ horizontal ou vertical, o que permite determinar imediatamente uma das coordenadas x_0 ou y_0 .

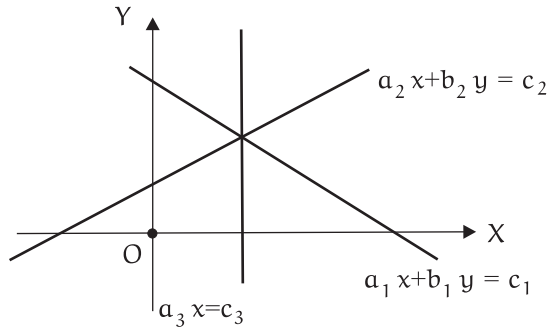


Figura 30.2 - O método de eliminação, visto geometricamente.

Exercícios

1. Admitindo que a_1 e a_2 não são simultaneamente nulos, prove que $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ e $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ implicam $b_1c_2 - b_2c_1 = 0$.
2. Sejam $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$ retas que se intersectam no ponto P. Prove que uma reta do plano passa por P se, e somente se, sua equação é da forma $(\alpha a_1 + \beta a_2)x + (\alpha b_1 + \beta b_2)y = \alpha c_1 + \beta c_2$ onde α e β são números reais não simultaneamente nulos.
3. No exercício anterior, supondo que as retas dadas sejam paralelas, que se pode dizer sobre a reta $(\alpha a_1 + \beta a_2)x + (\alpha b_1 + \beta b_2)y = \alpha c_1 + \beta c_2$?
4. Na situação dos dois exercícios anteriores, diz-se que a terceira equação é combinação linear das duas primeiras. Num sistema de 3 ou mais equações a 2 incógnitas, se duas das equações representam retas concorrentes, mostre que o sistema possui solução (única) se, e somente se, as demais equações são combinações lineares dessas duas.
5. Uma liga L_1 contém 30% de ouro e 70% de prata e uma liga L_2 tem 60% de ouro e 40% de prata. Quantos gramas de cada uma deve-se tomar a fim de formar 100 gramas de uma liga com igual quantidade de ouro e prata?

31

Sistemas de Equações Lineares com Três Incógnitas

O terno $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ chama-se uma *solução* do sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \end{aligned} \qquad (*)$$

quando suas coordenadas x, y, z satisfazem ambas equações.

Fixado um sistema de coordenadas $OXYZ$ no espaço E, as equações acima representam planos Π_1 e Π_2 que são perpendiculares respectivamente às retas OA_1 e OA_2, onde $A_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $A_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

Os planos Π_1 e Π_2 podem ser paralelos, podem coincidir ou podem intersectar-se segundo uma reta. Correspondentemente a estas alternativas, o sistema (*) pode ser impossível (sem solução) no primeiro caso ou indeterminado (com uma infinidade de soluções) no segundo caso.

Nos estudos elementares costuma-se dar pouca importância aos sistemas indeterminados. Tal atitude não se justifica. Esses sistemas são interessantes, cabendo-nos descrever explicitamente suas soluções, procurando entre elas as que melhor respondem ao problema que conduziu às equações.

O sistema (*) dá origem às duas matrizes abaixo. A primeira é chamada a *matriz* do sistema e, a segunda, a *matriz aumentada*:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

Os vetores $\ell_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\ell_2 = (a_2, b_2, c_2)$, em $\mathbb{R}^3$, são as linhas da matriz do sistema.

Para falar dos vetores-linha

$$L_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1) \quad \text{e} \quad L_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$$

da matriz aumentada, diremos algumas palavras sobre o espaço $\mathbb{R}^4$.

O espaço $\mathbb{R}^4$ é o conjunto cujos elementos são as listas ordenadas (x, y, z, t) de quatro números reais. Cada uma dessas listas pode ser chamada de um *ponto* $P = (x, y, z, t)$, ou de um *vetor* $v = (x, y, z, t)$ em $\mathbb{R}^4$. Em $\mathbb{R}^4$ – como em $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$, etc – há um elemento privilegiado $0 = (0, 0, 0, 0)$ que serve de origem a todos os vetores. Isto não acontece no espaço, nem no plano euclidiano, onde todos os pontos são iguais, pelo menos até introduzirmos um sistema de eixos, quando um deles tem o privilégio de ser escolhido como a origem.

Os números x, y, z, t são chamados as *coordenadas* do vetor $v = (x, y, z, t)$: x é a primeira coordenada, y é a segunda, etc. Dois vetores $v = (x, y, z, t)$ e $w = (x', y', z', t')$ dizem-se iguais quando $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ e $t = t'$. Assim, por exemplo, os vetores $(1, 2, 3, 1)$ e $(1, 3, 2, 1)$ são diferentes porque suas segundas (e terceiras) coordenadas são diferentes.

A *soma* de dois vetores $v = (x, y, z, t)$ e $w = (x', y', z', t')$ é o vetor

$$v + w = (x + x', y + y', z + z', t + t')$$

e o *produto* do número real α pelo vetor $v = (x, y, z, t)$ é o vetor

$$\alpha \cdot v = (\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha t).$$

Estas operações gozam das mesmas propriedades formais já estabelecidas para vetores do espaço tridimensional.

Chamam-se *vetores unitários básicos* de $\mathbb{R}^4$ aos vetores

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0) \text{ e} \\ e_4 &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Qualquer vetor $v = (x, y, z, t)$ escreve-se como uma combinação linear $v = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3 + t \cdot e_4$ pois

$$\begin{aligned} x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3 + t \cdot e_4 \\ &= (x, 0, 0, 0) + (0, y, 0, 0) + (0, 0, z, 0) + (0, 0, 0, t) \\ &= (x, y, z, t) = v. \end{aligned}$$

Nos casos de espaços com dimensão ≤ 3, pressupõem-se conhecidas as noções geométricas básicas, a partir das quais é definido o conceito de vetor, resultando então que $\mathbb{R}$ é o modelo aritmético de um eixo, $\mathbb{R}^2$ é o modelo aritmético de um plano munido de um sistema de eixos e $\mathbb{R}^3$ é o modelo aritmético do espaço euclidiano habitual, no qual foi fixado um sistema de eixos ortogonais. Já em quatro dimensões, faltanos uma intuição geométrica com base experimental pois o espaço em que vivemos é apenas tridimensional.

Por este motivo, partimos do modelo aritmético $\mathbb{R}^4$ e a ele aplicamos a linguagem vetorial-geométrica já desenvolvida antes para o plano e para o espaço euclidiano de dimensão 3.

Por exemplo, uma reta r em $\mathbb{R}^4$ é determinada por um ponto $A = (a, b, c, d)$ e um vetor $v = (m, n, p, q)$. Tem-se $r = \{A + \alpha \cdot v;\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Um plano Π em $\mathbb{R}^4$ fica determinado por um ponto $A = (a, b, c, d)$ e por dois vetores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ linearmente independentes (isto é, nenhum dos dois é múltiplo do outro). O plano Π é então o conjunto $\Pi = \{A + \alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Assim, $\Pi_{xy} = \{(x, y, 0, 0) \in \mathbb{R}^4;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ pode ser descrito como o plano $\Pi_{xy} = \{0 + x \cdot e_1 + y \cdot e_2; x, y \in \mathbb{R}\}$ e, analogamente, Π_{zt} é o plano formado pelos pontos da forma $(0, 0, z, t) = z \cdot e_3 + t \cdot e_4$. Aqui, vemos que $\Pi_{xy} \cap \Pi_{zt} = \{0\}$, portanto a interseção de dois planos em $\mathbb{R}^4$ pode reduzir-se a um único ponto. Isto contrasta com o espaço tridimensional E (ou com $\mathbb{R}^3$), onde dois planos distintos que têm um ponto em comum têm também uma reta em comum. É precisamente este último fato que caracteriza a tridimensionalidade de E.

Com efeito, a partir daí prova-se que, em E, se a reta OX tem um ponto O em comum com o plano Π_{yz} e o plano Π é paralelo a Π_{yz} então a reta OX tem exatamente um ponto em comum com o plano Π. Como vimos na Seção 24, foi este o argumento usado para atribuir exatamente três coordenadas a cada ponto P do espaço E, com auxílio do sistema de eixos $OXYZ$. (Se o espaço E tivesse mais de três dimensões, poderia ocorrer que um plano tirado por P paralelamente a Π_{yz} não cortasse o eixo OX.)

Nada (exceto o projeto deste livro) nos obriga a parar em $\mathbb{R}^4$. Para cada número natural n, podemos considerar o espaço n-dimensional $\mathbb{R}^n$, cujos elementos são as listas ordenadas $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n números reais.

Voltemos à discussão do sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2. \end{aligned} \qquad (*)$$

Sabemos que os planos Π_1 e Π_2, definidos pelas equações do sistema (*), coincidem se, e somente se, existe um número $k \neq 0$ tal que $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, $c_2 = kc_1$ e $d_2 = kd_1$. Isto equivale a dizer que

$$\begin{aligned} a_1b_2 - a_2b_1 &= a_1c_2 - a_2c_1 \\ &= a_1d_2 - a_2d_1 \\ &= b_1c_2 - b_2c_1 \\ &= b_1d_2 - b_2d_1 \\ &= c_1d_2 - c_2d_1 = 0. \end{aligned}$$

Observação: Como ao menos um dos vetores-coluna, $u = (a_1, a_2)$, $v = (b_1, b_2)$, $w = (c_1, c_2)$, é $\neq 0$, as 6 condições acima se reduzem, de fato, a 3. Com efeito, supondo $u \neq 0$, as 3 igualdades $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = a_1d_2 - a_2d_1 = 0$ dizem que os vetores v, w e $d = (d_1, d_2)$ são múltiplos de u, logo são todos colineares e daí $b_1c_2 - b_2c_1 = b_1d_2 - b_2d_1 = c_1d_2 - c_2d_1 = 0$.

Também podemos exprimir este fato dizendo que os vetores-linha L_1 e L_2 da matriz aumentada são múltiplos um do outro: $L_2 = k \cdot L_1$.

Os planos Π_1 e Π_2 são paralelos (isto é, o sistema (*) é impossível) se, e somente se, existe $k \neq 0$ tal que $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, $c_2 = kc_1$ mas $d_2 \neq kd_1$. Isto quer dizer que os vetores-linha da matriz de sistema são múltiplos um do outro ($\ell_2 = k\ell_1$) mas isto não se dá com os vetores-linha L_1, L_2 da matriz aumentada. Tem-se portanto $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = b_1c_2 - b_2c_1 = 0$ mas ao menos um dos números $a_1d_2 - a_2d_1$, $b_1d_2 - b_2d_1$ ou $c_1d_2 - c_2d_1$ é diferente de zero.

Finalmente, os planos Π_1 e Π_2 se intersectam segundo uma reta quando não coincidem nem são paralelos. Para que isto aconteça é necessário e suficiente que (pelo menos) um dos três números $a_1b_2 - a_2b_1$, $a_1c_2 - a_2c_1$, $b_1c_2 - b_2c_1$ seja diferente de zero. Esta condição equivale a dizer que os vetores-linha $\ell_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\ell_2 = (a_2, b_2, c_2)$ da matriz do sistema não são colineares (múltiplos um do outro). Neste caso, o sistema (*) é indeterminado.

O sistema (*) também é indeterminado quando suas equações definem o mesmo plano $\Pi_1 = \Pi_2$. Mas há uma diferença entre as duas

situações: quando $\Pi_1 = \Pi_2$, as soluções do sistema dependem de dois parâmetros livres; quando $\Pi_1 \cap \Pi_2$ é uma reta, essas soluções são expressas em função de um único parâmetro livre. Ilustremos este ponto por meio de exemplos.

Exemplo 31.1 As equações do sistema

$$6x - 4y + 2z = 8$$

$$9x - 6y + 3z = 12$$

definem o mesmo plano, no qual se tem $z = -3x + 2y + 4$. Portanto, as soluções deste sistema são os ternos $(x, y, -3x + 2y + 4)$, onde os dois parâmetros x, y assumem livremente quaisquer valores reais.

Exemplo 31.2 No sistema

$$6x - 4y + 2z = 8$$

$$9x - 6y + 2z = 12$$

os vetores-linha $(6, -4, 2)$ e $(9, -6, 2)$ não são colineares pois $-4 \cdot 2 - 2 \cdot (-6) \neq 0$. Logo os planos Π_1 e Π_2, definidos por estas equações, se intersectam segundo uma reta r. O ponto $P = (x, y, z)$ pertence à reta $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$ se, e somente se, (x, y, z) é uma solução do sistema. Para exprimir todas essas soluções em função de um único parâmetro, resolvemos o sistema

$$-4y + 2z = 8 - 6x$$

$$-6y + 2z = 12 - 9x,$$

no qual consideramos y e z apenas como incógnitas, obtendo $y = \frac{3}{2}x - 2$, $z = 0$. Assim as soluções do sistema proposto são os ternos

$$\left(x, \frac{3}{2}x - 2, 0\right),$$

onde o parâmetro x pode assumir qualquer valor real. Noutras palavras, $x = t$, $y = \frac{3}{2}t - 2$, $z = 0$ são as equações paramétricas da reta r.

Exemplo 31.3 No sistema

$$6x - 4y + 2z = 9$$

$$9x - 6y + 3z = 12,$$

os vetores-linha $(6,-4,2)$ e $(9,-6,3)$ de sua matriz são colineares, mas o mesmo não ocorre com os vetores-linha $(6,-4,2,9)$ e $(9,-6,3,12)$ da matriz aumentada. Logo os planos Π_1 e Π_2, determinados pelas duas equações, são paralelos, ou seja, o sistema dado é impossível.

Sob o ponto de vista dos vetores-coluna $u = (a_1, a_2)$, $v = (b_1, b_2)$, $w = (c_1, c_2)$ e $d = (d_1, d_2)$ da matriz aumentada, o sistema (*) possui solução se, e somente se, o vetor $d \in \mathbb{R}^2$ é uma combinação linear $d = xu + yv + zw$ das colunas u, v e w. Como sabemos, se dois dos vetores u, v, w são não-colineares (isto é, se algum dos números $a_1b_2 - a_2b_1$, $a_1c_2 - a_2c_1$, $b_1c_2 - b_2c_1$ é diferente de zero) então qualquer vetor d em $\mathbb{R}^2$ é combinação linear deles dois (logo dos três) e o sistema possui solução.

Exercícios

1. Para cada um dos sistemas a seguir, decida se existem ou não soluções. No caso afirmativo, exiba todas as soluções do sistema em termos de um ou dois parâmetros independentes.

$$x + 2y + 3z = 4 \qquad 2x - y + 5z = 3 \qquad 6x - 4y + 12z = 2$$
$$2x + 3y + 4z = 5 \qquad 4x - 2y + 10z = 5 \qquad 9x - 6y + 18z = 3$$

2. Sejam $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ e $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ as equações de 2 planos que têm a reta r em comum. Mostre que $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ é a equação de um plano que contém essa mesma reta se, e somente se, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $a_3 = \alpha a_1 + \beta a_2$, $b_3 = \alpha b_1 + \beta b_2$, $c_3 = \alpha c_1 + \beta c_2$ e $d_3 = \alpha d_1 + \beta d_2$.

3. Considerando os 4 vetores-coluna $u = (a_1, a_2)$, $v = (b_1, b_2)$, $w = (c_1, c_2)$ e $d = (d_1, d_2)$, escreva o sistema de duas equações com três incógnitas sob a forma $x\cdot u + y\cdot v + z\cdot w = d$ e, a partir daí, interprete a coincidência, o paralelismo e a concorrência dos planos definidos pelas equações $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$.

4. Na linha do exercício anterior, mostre que se $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ então o sistema admite sempre uma solução do tipo $(x, y, 0)$.

5. Dispondo de três ligas L_1, L_2 e L_3, cujas percentagens de ouro e prata são dadas na tabela abaixo,

	L_1	L_2	L_3
ouro	30%	40%	80%
prata	70%	60%	20%

quero obter $100g$ de uma liga L_4 formada por igual quantidade de ouro e prata. Desejo fazer isso de modo a usar o máximo possível da liga L_1. Quantos gramas devo tomar de cada liga?

6. No sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \end{aligned}$$

admitindo que se têm realmente três incógnitas, mostre que se $a_1b_2 - a_2b_1 = b_1c_2 - b_2c_1 = c_1d_2 - c_2d_1 = 0$ então existe $k \neq 0$ tal que $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, $c_2 = kc_1$ e $d_2 = kd_1$.

32

Três Equações Lineares com Três Incógnitas

Nesta seção, que será bem mais longa do que as outras, faremos a interpretação geométrica dos sistemas de três equações lineares com três incógnitas e estabeleceremos as conexões entre a situação geométrica e os coeficientes do sistema.

Consideremos o sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3, \end{aligned} \qquad (*)$$

de três equações com três incógnitas. Estas equações definem, nesta ordem, os planos Π_1, Π_2 e Π_3. Um terno $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é solução do sistema quando o ponto $P = (x, y, z)$ pertence à interseção $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$, isto é, quando P está simultaneamente em cada um dos três planos.

O sistema (*) tem uma matriz 3×3 e uma matriz aumentada 3×4, que são respectivamente:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Os vetores-linha da matriz do sistema são $\ell_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\ell_2 = (a_2, b_2, c_2)$ e $\ell_3 = (a_3, b_3, c_3)$. Eles são perpendiculares aos planos Π_1, Π_2 e Π_3 respectivamente. Os vetores-linha da matriz aumentada são

$L_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $L_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ e $L_3 = (a_3, b_3, c_3, d_3)$, pertencentes ao espaço $\mathbb{R}^4$. Como já foi dito antes, ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 são supostos não-nulos em $\mathbb{R}^3$, logo L_1 , L_2 e L_3 também são diferentes do vetor $0 \in \mathbb{R}^4$.

A existência de soluções do sistema (*), que passamos a discutir agora, se baseia na dependência ou independência linear desses vetores-linha. Vejamos este conceito.

Dizemos que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ (em $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$) são *linearmente independentes* quando nenhum deles é combinação linear dos demais. Assim, afirmar que v_1, v_2 e v_3 são linearmente independentes significa dizer que não se podem encontrar números α_1, α_2 tais que $v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, nem números β_1, β_3 tais que $v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_3 v_3$, nem tampouco existem γ_2, γ_3 tais que $v_1 = \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3$.

Exemplo 32.1 Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ em $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes. Com efeito, uma combinação linear qualquer de e_2 e e_3 tem a primeira coordenada igual a zero, logo não pode ser igual a e_1. Por motivo análogo, e_2 não pode ser combinação linear de e_1 e e_3, nem e_3 de e_1 e e_2.

Quando os vetores de um conjunto não são linearmente independentes, isto é, quando algum vetor desse conjunto pode escrever-se como combinação linear dos demais, diz-se que os vetores do conjunto dado são *linearmente dependentes*.

Exemplo 32.2 Sejam $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ e $w = (7, 8, 9)$. Então tem-se $u = 2v - w$, logo os vetores u, v, w são linearmente dependentes.

Se um dos vetores u, v, w é múltiplo do outro, digamos $w = \alpha \cdot v$, então u, v e w são linearmente dependentes, porque podemos escrever $w = 0 \cdot u + \alpha \cdot v$. Em particular, se um dos vetores do conjunto é igual a zero (que é múltiplo de qualquer vetor) então os vetores desse conjunto são linearmente dependentes.

Exemplo 32.3 Os vetores $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ e $w = (3, 6, 9)$ são linearmente dependentes pois $w = 3u$.

No exemplo acima, w é combinação linear de u e v mas v não é combinação linear de u e w. (Toda combinação linear de u e w tem a forma $\alpha u + \beta w = \alpha u + 3\beta u = (\alpha + 3\beta)u$ logo é um múltiplo de u e então não pode ser igual a v.)

Geometricamente, dizer que os vetores u, v, w em $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes significa afirmar que eles são coplanares, isto é, que se representarmos $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ e $w = \overrightarrow{AD}$ por segmentos de reta orientados

com o mesmo ponto inicial A então os pontos A, B, C e D estão situados num mesmo plano.

Em contraposição, dizer que os vetores u, v e w são linearmente independentes significa afirmar que, na situação acima, os pontos A, B, C e D são os vértices de um tetraedro.

Se os vetores u, v, w são linearmente dependentes mas nenhum deles é múltiplo do outro então qualquer um deles é combinação linear dos outros dois. Com efeito, se tivermos (digamos) $w = \alpha u + \beta v$ então α e β são ambos diferentes de zero pois w não é múltiplo de v nem de u. Logo temos

$$u = -\frac{\beta}{\alpha}v + \frac{1}{\alpha}w \quad \text{e} \quad v = -\frac{\alpha}{\beta}u + \frac{1}{\beta}w.$$

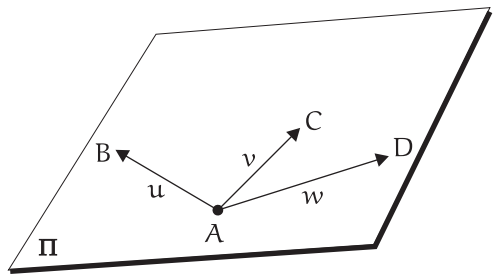


Figura 32.1 - Vetores linearmente dependentes (coplanares).

Exemplo 32.4 Sejam $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, 4, 5)$ e $w = (1, 2, 5)$. Nenhum desses vetores é múltiplo de outro. Logo, se eles forem linearmente dependentes, poderemos escrever $u = \alpha v + \beta w$, ou seja,

$$\begin{aligned}(1, 2, 3) &= (2\alpha, 4\alpha, 5\alpha) + (\beta, 2\beta, 5\beta) \\ &= (2\alpha + \beta, 4\alpha + 2\beta, 5\alpha + 5\beta).\end{aligned}$$

Isto significa:

$$2\alpha + \beta = 1, \quad 4\alpha + 2\beta = 2, \quad 5\alpha + 5\beta = 3.$$

Ora, das equações $2\alpha + \beta = 1$, $5\alpha + 5\beta = 3$ nos dão $\alpha = 2/5$, $\beta = 1/5$. Estes valores de α e β satisfazem a equação $4\alpha + 2\beta = 2$. Logo u pode ser expresso como combinação linear de v e w, a saber: $u = \frac{2}{5}v + \frac{1}{5}w$. Portanto u, v e w são vetores linearmente dependentes.

O exemplo acima sugere um método geral para decidir se um vetor $u = (a_1, b_1, c_1)$ é ou não uma combinação linear $u = \alpha v + \beta w$ dos vetores $v = (a_2, b_2, c_2)$ e $w = (a_3, b_3, c_3)$.

Se um dos vetores v, w é múltiplo do outro, a igualdade $u = \alpha v + \beta w$ significa que u também é múltiplo de v ou w, o que pode ser constatado por mera inspeção.

Se u e v não são colineares, pelo menos um dos números $a_1b_2 - a_2b_1$, $a_1c_2 - c_1a_2$, $b_1c_2 - c_1b_2$ é diferente de zero. Seja, por exemplo, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Então existe um (e somente um) par de números α, β tais que $\alpha a_1 + \beta a_2 = a_3$ e $\alpha b_1 + \beta b_2 = b_3$. Obtidos estes números α e β, testa-se a igualdade $\alpha c_1 + \beta c_2 = c_3$. Se ela for verdadeira, então $u = \alpha v + \beta w$ (com estes valores de α e β). Se ela for falsa, u não é combinação linear de v e w e os vetores u, v, w são linearmente independentes.

Voltemos ao sistema (*). Do ponto de vista da existência ou não de soluções do mesmo, há oito situações possíveis dos planos Π_1, Π_2 e Π_3, definidos pelas três equações. Examinaremos essas situações e mostraremos como identificá-las a partir dos vetores-linha ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 da matriz do sistema e L_1, L_2, L_3 da matriz aumentada.

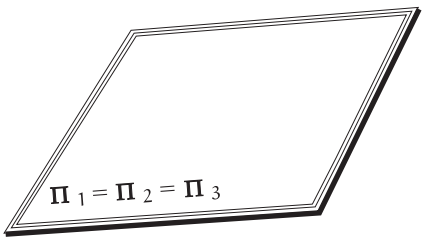


Figura 32.2 - 1º caso: as três equações definem o mesmo plano.

1º caso: Os três planos coincidem. $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3$. Neste caso, o sistema é indeterminado. Todos os pontos $(x, y, z) \in \Pi_1$ são soluções. Esta situação acontece se, e somente se, os vetores L_1, L_2 e L_3 são colineares, isto é, múltiplos uns dos outros.

Exemplo 32.5 Seja o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x + 4y - 2z &= 6 \\ 3x + 6y - 3z &= 9. \end{aligned}$$

Temos $L_1 = (1, 2, -1, 3)$, $L_2 = (2, 4, -2, 6)$, $L_3 = (3, 6, -3, 9)$, logo $L_2 = 2L_1$ e $L_3 = 3L_1$. As soluções do sistema são todos os ternos $(x, y, x + 2y - 3)$, onde $x, y \in \mathbb{R}$ são arbitrários.

2º caso: Dois dos planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles. $\Pi_1 = \Pi_2$ e $\Pi_3 // \Pi_1$. Neste caso, o sistema não possui solução: é impossível. Esta situação ocorre quando $L_2 = \alpha \cdot L_1$ (logo $\ell_2 = \alpha \cdot \ell_1$), $\ell_3 = \beta \cdot \ell_1$ mas L_3 não é múltiplo de L_1.

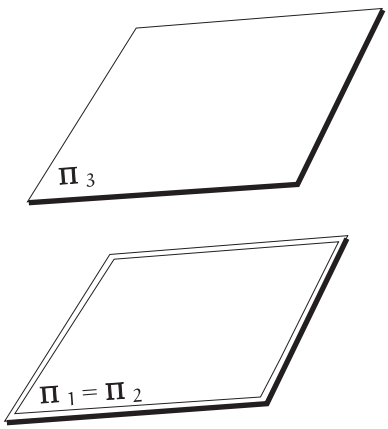


Figura 32.3 - Ilustrando o segundo caso.

Exemplo 32.6 No sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x + 4y - 2z &= 6 \\ 3x + 6y - 3z &= 8, \end{aligned}$$

tem-se $L_2 = 2L_1$, $\ell_3 = 3\ell_1$ mas L_3 não é múltiplo de L_1. Portanto este sistema não tem solução.

3º caso: Dois dos planos coincidem e o terceiro os intersecta segundo uma reta. $\Pi_1 = \Pi_2$ e $\Pi_1 \cap \Pi_3 = r$. Neste caso o sistema é indeterminado. Suas soluções são as coordenadas (x, y, z) dos pontos da reta r. Reconhece-se esta situação notando que $L_2 = \alpha \cdot L_1$ (logo $\ell_2 = \alpha \cdot \ell_1$) mas ℓ_3 não é múltiplo de ℓ_1.

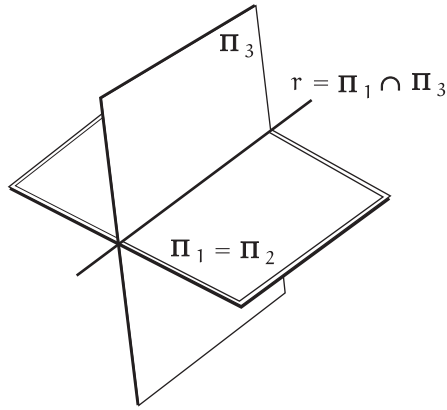


Figura 32.4 - O terceiro caso.

Exemplo 32.7 O sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x + 4y - 2z &= 6 \\ 3x + 6y + z &= 9 \end{aligned}$$

apresenta $\Pi_1 = \Pi_2$ mas $\ell_3 = (3, 6, 1)$ não é múltiplo de $\ell_1 = (1, 2, -1)$, logo a interseção $\Pi_3 \cap \Pi_1$ é a reta r, formada pelos pontos $P = (x, y, z)$ cujas coordenadas são as soluções do sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 3x + 6y + z &= 9 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} 2y - z &= 3 - x \\ 6y + z &= 9 - 3x \end{aligned}$$

Resolvendo-o na segunda forma, obtemos $y = (3 - x)/2$ e $z = 0$. Portanto as soluções do sistema dado são $(x, (3-x)/2, 0)$, para qualquer valor real de x. Estes pontos formam uma reta em $\mathbb{R}^3$, cujas equações paramétricas são $x = t$, $y = \frac{3}{2} - \frac{t}{2}$ e $z = 0$.

4º caso: Os planos Π_1, Π_2 e Π_3 são paralelos dois a dois. Neste caso, o sistema não admite solução: é impossível. Em termos dos vetores-linha, a presente situação se dá quando cada um dos vetores ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 é múltiplo de outro mas os vetores L_1, L_2, L_3 são dois a dois não-colineares.

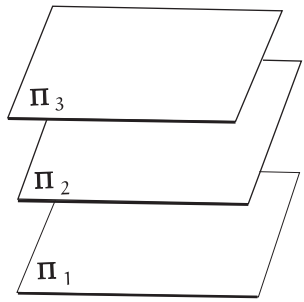


Figura 32.5 - As 3 equações definem 3 planos paralelos.

Exemplo 32.8 Este é o caso do sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x + 4y - 2z &= 4 \\ 3x + 6y - 3z &= 5, \end{aligned}$$

para o qual se $\ell_1 = (1, 2, -1)$, $\ell_2 = (2, 4, -2)$ e $\ell_3 = (3, 6, -3)$, logo $\ell_2 = 2\ell_1$ e $\ell_3 = 3\ell_1$. Mas as linhas da matriz aumentada, $L_1 = (1, 2, -1, 3)$, $L_2 = (2, 4, -2, 4)$ e $L_3 = (3, 6, -3, 5)$ são duas a duas não-colineares.

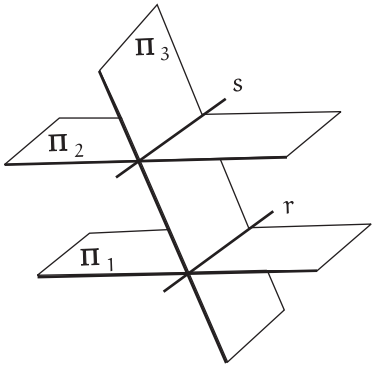


Figura 32.6 - $5^{\underline{o}}$ caso: não há solução.

5º caso: Os planos Π_1 e Π_2 são paralelos e Π_3 os intersecta segundo retas paralelas r e s. Como $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$, tem-se $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \varnothing$, isto é, o sistema não possui solução: é impossível. Esta

situação geométrica caracteriza-se pelas seguintes condições algébricas: $\ell_2 = \alpha \cdot \ell_1$ mas L_2 não é múltiplo de L_1 (paralelismo entre Π_1 e Π_2). Além disso, ℓ_3 não é múltiplo de ℓ_1 (Π_3 e Π_1 não são paralelos).

Exemplo 32.9 O sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x + 4y - 2z &= 5 \\ x + 2y + z &= 9 \end{aligned}$$

tem $\ell_1 = (1, 2, -1)$, $\ell_2 = (2, 4, -2)$, $\ell_3 = (1, 2, 1)$ e as linhas aumentadas $L_1 = (1, 2, -1, 3)$, $L_2 = (2, 4, -2, 5)$, $L_3 = (1, 2, 1, 9)$. Vemos que $\ell_2 = 2\ell_1$ e L_2 não é múltiplo de L_1. Portanto os planos Π_1 e Π_2 são paralelos. Notamos ainda que o vetor ℓ_3 não é múltiplo de ℓ_1. Logo o plano Π_3 corta os planos paralelos Π_1 e Π_2 segundo retas paralelas r e s.

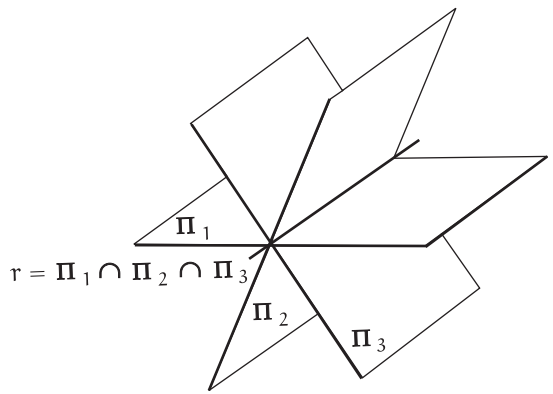


Figura 32.7 - Três planos com uma reta em comum.

6º caso: Π_1, Π_2 e Π_3 são três planos distintos que têm uma reta r em comum. Neste caso o sistema é indeterminado. Suas soluções (x, y, z) são as coordenadas dos pontos da reta $r = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$.

Caracterizemos algebricamente esta situação geométrica. Não havendo paralelismo nem coincidência entre dois quaisquer dos planos Π_1, Π_2, Π_3, os vetores ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 são dois a dois não-colineares, ou seja, nenhum deles é múltiplo de outro. A reta r, estando contida em cada um dos três planos, é perpendicular aos vetores ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3, logo estes vetores são

coplanares: tem-se $\ell_3 = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$. Isto nos dá:

$$a_3 = \alpha a_1 + \beta a_2, \quad b_3 = \alpha b_1 + \beta b_2, \quad c_3 = \alpha c_1 + \beta c_2.$$

Se tomarmos um ponto qualquer (x_0, y_0, z_0) na reta r teremos $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1$, $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2$ e

$$\begin{aligned} d_3 &= a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 \\ &= (\alpha a_1 + \beta a_2)x_0 + (\alpha b_1 + \beta b_2)y_0 + (\alpha c_1 + \beta c_2)z_0 \\ &= \alpha(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0) + \beta(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0) \\ &= \alpha d_1 + \beta d_2. \end{aligned}$$

Segue-se daí que $L_3 = \alpha L_1 + \beta L_2$.

Evidentemente, esta última igualdade implica $\ell_3 = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$.

Acabamos de mostrar que se o 6º caso ocorre então nenhum dos vetores ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 é múltiplo de outro e $L_3 = \alpha L_1 + \beta L_2$.

Reciprocamente, se valem estas condições algébricas então os planos Π_1, Π_2, Π_3 são distintos e nenhum deles é paralelo a outro. Tomemos um ponto (x_0, y_0, z_0) sobre a reta $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$. Então $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1$ e $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2$. Multiplicando a primeira destas igualdades por α, a segunda por β e somando vem:

$$(\alpha a_1 + \beta a_2)x_0 + (\alpha b_1 + \beta b_2)y_0 + (\alpha c_1 + \beta c_2)z_0 = \alpha d_1 + \beta d_2.$$

A relação $L_3 = \alpha L_1 + \beta L_2$ permite que escrevamos a igualdade anterior como

$$a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 = d_3.$$

Isto mostra que todo ponto da reta $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$ pertence ao plano Π_3, ou seja $r \subset \Pi_3$. Logo $r = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$.

Em suma: o 6º caso (três planos distintos com uma reta em comum) ocorre se, e somente se, L_3 é combinação linear de L_1 e L_2 e nenhum dos vetores ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 é múltiplo de outro.

Exemplo 32.10 Os planos definidos pelas equações do sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 5x + 2y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

são dois a dois distintos e têm uma reta em comum. O sistema é indeterminado. Suas soluções são os pontos da forma

$$\left(x, \frac{1}{2}x - 1, 2 - \frac{3}{2}x\right),$$

onde x assume livremente qualquer valor real. Isto se dá porque os vetores $\ell_1 = (1,1,1)$, $\ell_2 = (2,-1,1)$ e $\ell_3 = (5,2,4)$ são dois a dois não-colineares, e, como se verifica facilmente, tem-se $L_3 = 3L_1 + L_2$.

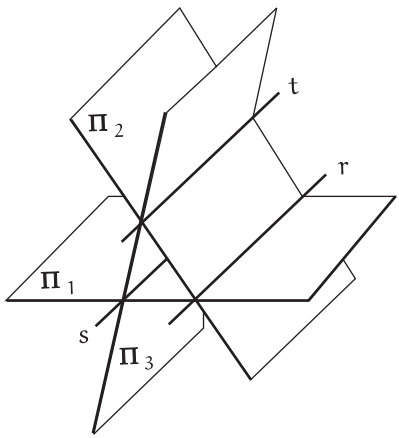


Figura 32.8 - Ilustrando o sétimo caso.

7º caso: Os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$, $s = \Pi_1 \cap \Pi_3$ e $t = \Pi_2 \cap \Pi_3$, paralelas umas às outras. Neste caso, o sistema é impossível.

O fato de não haver paralelismo nem coincidência entre dois quaisquer dos planos Π_1, Π_2 e Π_3 equivale a dizer que nenhum dos vetores ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 é múltiplo de outro. Os vetores ℓ_1 e ℓ_2 são ortogonais à reta r porque ela está contida em Π_1 e em Π_2. O vetor ℓ_3 é ortogonal a s porque esta reta está contida em Π_3. Como r e s são paralelas, vemos que ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 são ortogonais a r, portanto ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 são coplanares: tem-se $\ell_3 = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$. Mas não se pode ter $L_3 = \alpha L_1 + \beta L_2$, como vimos no final da discussão do 6º caso; se isto acontecesse as retas r, s e t coincidiriam.

Portanto, se ocorre o 7º caso, os vetores ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 são dois a dois não-colineares, tem-se $\ell_3 = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$ e $L_3 \neq \alpha L_1 + \beta L_2$.

Reciprocamente, se $\ell_3 = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$ mas, $L_3 \neq \alpha L_1 + \beta L_2$, então o sistema não tem solução, portanto $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \varnothing$ e daí as retas coplanares $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$ e $t = \Pi_2 \cap \Pi_3$ são disjuntas (pois $r \cap t = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$) ou seja, paralelas. Analogamente $r//s$ e $s//t$.

Observação: Isto equivale a dizer que L_3 não é combinação linear de L_1 e L_2 ou, mais simplesmente ainda, que L_1, L_2 e L_3 são linearmente independentes.

Exemplo 32.11 No sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ 3x + u + z &= 2 \\ 8x + y + 6z &= 6, \end{aligned}$$

os vetores-linha $\ell_1 = (1, 2, -3)$, $\ell_2 = (3, 1, 1)$ e $\ell_3 = (8, 1, 6)$ são dois a dois não-colineares. Tem-se $\ell_3 = 3\ell_2 - \ell_1$, de modo que ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 são coplanares. Mas $6 \neq 3 \times 2 - 1$, logo $L_3 \neq 3L_2 - L_1$. Portanto os planos definidos pelas equações acima se intersectam dois a dois segundo três retas paralelas.

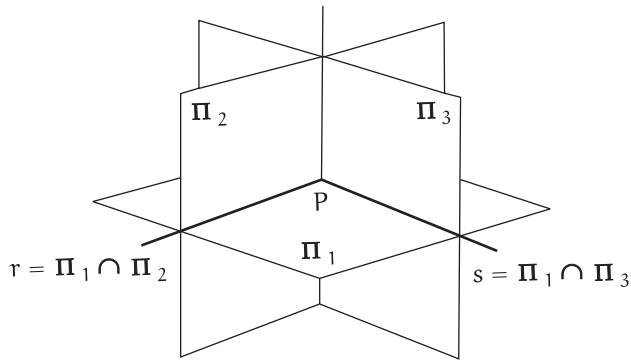


Figura 32.9 - Quando as linhas ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 são linearmente independentes o sistema tem uma única solução.

8º caso: Os três planos Π_1, Π_2 e Π_3 têm um único ponto em comum. Neste caso, o sistema é determinado. Do ponto de vista algébrico, isto ocorre se, e somente se, os vetores-linha ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 da matriz do sistema são linearmente independentes.

Com efeito, em primeiro lugar, se $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_2 = \{P\}$, não há paralelismo nem coincidência entre esses planos, logo os vetores ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 são dois

a dois não-colineares. Mais do que isto: não se pode ter $\ell_3 = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$ pois, em virtude dos dois casos anteriores, se isto acontecesse então o sistema seria indeterminado ou impossível, conforme fosse $L_3 = \alpha L_1 + \beta L_2$ ou $L_3 \neq \alpha L_1 + \beta L_2$. Portanto se o 8º caso acontece os vetores ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 são linearmente independentes.

Reciprocamente, se ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 são linearmente independentes então nem ℓ_2 nem ℓ_3 é múltiplo de ℓ_1, logo as interseções $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$, $s = \Pi_1 \cap \Pi_3$ e $t = \Pi_2 \cap \Pi_3$ são retas. As retas s, t não podem ser ambas paralelas a r porque então estaríamos no 7º caso e ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 não seriam linearmente independentes. Digamos que s não seja paralela a r. Como estão ambas no plano Π_1, têm portanto um ponto P em comum. Pertencendo a r e s, P está em Π_1, Π_2 e Π_3. Nenhum outro ponto pode pertencer a $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ porque então essa interseção seria uma reta e estaríamos no 6º caso, em que ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 são linearmente dependentes.

Em suma: o sistema (*) possui uma única solução se, e somente se, os vetores $\ell_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\ell_2 = (a_2, b_2, c_2)$ e $\ell_3 = (a_3, b_3, c_3)$ são linearmente independentes.

Exemplo 32.12 Dado o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \\ 3x - y + 2 &= 1, \end{aligned}$$

podemos ver que os vetores-linha $\ell_1 = (1, 2, 3)$, $\ell_2 = (2, 1, 1)$ e $\ell_3 = (3, -1, 2)$ são linearmente independentes. Com efeito, olhando para as duas primeiras coordenadas, vemos que $(3, -1) = \alpha \cdot (1, 2) + \beta \cdot (2, 1)$, com $\alpha = -5/3$ e $\beta = 7/3$. Logo, só poderíamos ter $\ell_3 = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$ se α e β tivessem esses valores. Mas, examinando as terceiras coordenadas, vemos que $2 \neq -\frac{5}{3} \cdot 3 + \frac{7}{3} \cdot 1$. Portanto ℓ_3 não é combinação linear de ℓ_1 e ℓ_2. Como ℓ_1 e ℓ_2 não são múltiplos um do outro, conclui-se que, de fato, ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 são linearmente independentes. Portanto o sistema possui uma única solução.

Sabemos que o sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \qquad (*)$$

pode ser olhado não somente do ponto de vista de suas linhas, como fizemos nesta seção, mas também em termos das colunas $u = (a_1, a_2, a_3)$,

$v = (b_1, b_2, b_3)$, $w = (c_1, c_2, c_3)$ e $d = (d_1, d_2, d_3)$ de sua matriz aumentada. Vistas sob este ângulo, as 3 igualdades numéricas (*) equivalem à igualdade vetorial

$$x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w = d.$$

Portanto o sistema (*) possui solução se, e somente se, o vetor d é combinação linear dos vetores u, v e w. Os coeficientes x, y, z dessa combinação constituem uma solução do sistema.

É bom notar que a condição para um sistema linear 3×3 possuir uma única solução não envolve a última coluna da matriz aumentada: se os vetores-linha l_1, l_2, l_3 forem linearmente independentes então, sejam quais forem os números d_1, d_2, d_3, existem e são únicos os números x, y, z tais que $x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w = d$.

Daí resulta uma conclusão interessante: se os vetores-linha l_1, l_2, l_3 de uma matriz 3×3 são linearmente independentes então os vetores-coluna u, v, w da mesma matriz também são linearmente independentes.

Com efeito, se uma das colunas fosse combinação linear das demais, digamos $w = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$, então $\alpha \cdot u + \beta \cdot v + (-1)w = 0$ e o sistema $x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w = 0$ admitiria as duas soluções distintas $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = -1$ e $x = y = z = 0$, embora suas linhas l_1, l_2, l_3 sejam linearmente independentes.

Exercícios

1. Sejam $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, -1, 2)$, $C = (4, 3, -1)$ e $D = (5, -15, 6)$. Mostre que os vetores $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ e $w = \overrightarrow{AD}$ são linearmente dependentes e ache a equação de um plano que contenha os pontos A, B, C e D.

2. Sejam A, B, C, D pontos não-coplanares. Descreva um método geométrico (isto é, sem uso de coordenadas) que permita escrever, para qualquer ponto P, o vetor $\overrightarrow{AP}$ como combinação linear dos vetores $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ e $w = \overrightarrow{AD}$.

3. Escrevendo um sistema 3×3 sob a forma $x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w = d$, onde u, v, w e d são vetores-coluna da matriz aumentada do sistema, como se pode exprimir a coincidência dos 3 planos em termos desses vetores-coluna?

4. Seja

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \\ -2a & -2b & -2c \end{bmatrix}$$

a matriz dos coeficientes de um sistema linear 3×3. Se a segunda equação do sistema é $3ax + 3by + 3cz = d$, quais devem ser as outras duas a fim de que o sistema possua solução?

5. Escreva um sistema 3×3 cuja matriz dos coeficientes seja a do exercício anterior, mas que não possua solução.

6. No sistema abaixo, atribua sucessivamente valores aos parâmetros m, n de modo que as três equações representem um único plano, dois planos ou três planos:

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= m \\ 3x - 6y - 9z &= n \\ -2x + 4y + 6z &= 1. \end{aligned}$$

7. Para quais valores de m e n o sistema abaixo possui solução?

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + 2y - 2z &= 3 \\ 3x + 3y + mz &= n. \end{aligned}$$

8. Determine todos os pontos de coordenadas positivas que pertencem simultaneamente aos planos definidos pelas três equações abaixo

$$\begin{aligned} 2x - 6y + 2z &= 4 \\ x + 2y + 5z &= 4 \\ 3x - 9y + 3z &= 6. \end{aligned}$$

9. Para cada um dos sistemas abaixo, decida em qual dos casos (primeiro a oitavo) discutidos no texto ele se enquadra. Determine também todas as soluções do sistema, se houver.

$$\begin{aligned} 3x - 5y + 2z &= 1 \\ 4x - 3y + z &= 2 \\ 2x - 7y + 3z &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - 5y + 2z &= 2 \\ 4x - 3y + z &= 1 \\ 5x - 12y + 5z &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 5y + 2z &= 3 \\ 4x - 3y + z &= 4 \\ 6x - 10y + 4z &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - 5y + 2z &= 4 \\ 4x - 3y + z &= 3 \\ 5x - 7y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

10. Chama-se *posto* de uma matriz ao número máximo de linhas linearmente independentes que ela possui. Dado o sistema homogêneo

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0, \end{aligned}$$

prove que suas soluções formam um plano passando pela origem, uma reta passando pela origem ou se reduzem a um só ponto (a origem) conforme a matriz dos coeficientes tenha posto 1, 2 ou 3.

11. Obtenha todas as soluções do sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4t &= 0 \\ 5x + 6y + 7z + 8t &= 0 \\ 9x + 10y + 11z + 12t &= 0. \end{aligned}$$

12. Prove que todo sistema linear homogêneo (isto é, cujos termos constantes são todos iguais a zero) de três equações com quatro incógnitas possui uma infinidade de soluções.

13. Prove: se os vetores-coluna de uma matriz 3×3 são linearmente independentes então os vetores-linha da mesma matriz também são linearmente independentes.

33

Escalonamento (eliminação gaussiana)

Na seção anterior foi feita, com detalhes, uma análise qualitativa dos sistemas lineares de três equações a três incógnitas, com ênfase na interpretação geométrica, mostrando-se ainda as condições algébricas que correspondem às diversas situações relativas de três planos no espaço.

Na presente seção, olharemos para o mesmo problema sob o ponto de vista algorítmico, isto é, mediante um processo que nos conduzirá, passo a passo, não apenas à resposta para a questão da existência de soluções, como também à determinação explícita de tais soluções, quando existirem.

O método mais simples e eficaz para resolver sistemas é o do escalonamento, ou eliminação gaussiana. Ele é elementar, consagrado por seu uso secular e, ao mesmo tempo, atual.

Usemos escalonamento para resolver o sistema linear

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned}$$

Esse processo opera sobre as matrizes abaixo, que são a *matriz* e a *matriz aumentada* do sistema:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Diz-se que uma matriz é *escalonada* quando o primeiro elemento não-nulo de cada uma das suas linhas situa-se à esquerda do primeiro elemento não-nulo da linha seguinte. Além disso, as linhas que tiverem todos os seus elementos iguais a zero devem estar abaixo das demais.

Exemplo 33.1 As matrizes abaixo são escalonadas:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um *sistema escalonado* (isto é, um cuja matriz é escalonada) pode ser facilmente resolvido de baixo para cima, obtendo-se primeiro o valor da última incógnita, substituindo-a por esse valor na equação anterior, e assim por diante.

Exemplo 33.2 Consideremos os sistemas

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ y + 4z &= 2 \\ 2z &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x + y + 5z &= 20 \\ z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ y + 5z &= -1 \\ 0x + 0y + 0z &= 1 \end{aligned}$$

As matrizes dos dois primeiros são $\mathbf{m}$ e $\mathbf{m}'$ do Exemplo 33.1. A matriz aumentada do terceiro é $\mathbf{M}$, também do Exemplo 33.1.

No primeiro sistema temos $z = 1$. Substituindo na segunda equação, resulta $y = -2$. Novamente substituindo z por 1 e y por -2 na primeira equação vem $x = 3$. Portanto $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$ é a solução do primeiro sistema. Quanto ao segundo sistema, tem-se $z = 3$. Entrando com este valor na segunda equação resulta $3x + y = 5$. Portanto, as soluções do segundo sistema são os pontos $(x, 5 - 3x, 3)$ em $\mathbb{R}^3$, onde x pode assumir qualquer valor real. Estas soluções formam a reta $y = -3x + 5$ no plano $z = 3$. Finalmente, é claro que o terceiro sistema não admite solução (é impossível) pois não existem números x, y, z tais que $0x + 0y + 0z = 1$. Este exemplo foi incluído aqui porque no processo de escalonamento, que descreveremos a seguir, pode-se chegar a uma matriz aumentada em cuja última linha (ou em cujas duas últimas linhas) os três primeiros elementos sejam iguais a zero porém o quarto seja diferente de zero.

Lembramos que dois sistemas se dizem equivalentes quando têm as mesmas soluções.

O método do escalonamento se baseia no fato de que todo sistema é equivalente a um sistema escalonado.

Partindo de um sistema arbitrário chega-se a um sistema escalonado equivalente por meio de uma seqüência de operações elementares, que são as seguintes:

1) Trocar a ordem das equações do sistema;

2) Substituir uma equação do sistema por sua soma com um múltiplo de outra equação do mesmo sistema.

Se L_1, L_2, L_3 são as linhas da matriz aumentada do sistema dado, a operação elementar (1) significa considerar um novo sistema cuja matriz aumentada tem linhas L_2, L_1, L_3 ou L_1, L_3, L_2 etc. Evidentemente o novo sistema é equivalente ao primeiro.

Quanto à segunda operação elementar, ela significa considerar o sistema cuja matriz aumentada tem linhas $L_1, L_2, L_3 + \alpha \cdot L_1$, por exemplo.

Ora, as soluções dos sistemas abaixo são as mesmas:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned} \qquad (*)$$

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ (a_3 + \alpha a_1)x + (b_3 + \alpha b_1)y + (c_3 + \alpha c_1)z &= d_3 + \alpha d_1. \end{aligned} \qquad (**)$$

Com efeito, se (x, y, z) satisfaz o sistema (*) então satisfaz as duas primeiras equações de (**). Multiplicando a primeira equação de (*) por α e somando-a com a terceira, vemos que (x, y, z) também satisfaz a terceira equação de (**).

Reciprocamente, se (x, y, z) é solução de (**) então satisfaz as duas primeiras equações de (*). Multiplicando a primeira equação de (**) por α e subtraindo-a da terceira, vemos que (x, y, z) satisfaz a última equação de (*), logo é solução de (*).

Portanto, submetendo um sistema a uma série de operações elementares, obtém-se um sistema equivalente.

Mostraremos agora como proceder de modo que as sucessivas operações elementares conduzam a um sistema escalonado.

Em primeiro lugar, trocando a ordem das equações se necessário, podemos supor que $a_1 \neq 0$. (Se fosse $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, teríamos um sistema com duas incógnitas, assunto já tratado antes.)

(1) O início do processo realmente consiste em somar à segunda equação a primeira multiplicada por $-a_2/a_1$ e somar à terceira equação a primeira multiplicada por $-a_3/a_1$. Isto conduz a um sistema equivalente, da forma

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ b_2'y + c_2'z &= d_2' \\ b_3'y + c_3'z &= d_3'. \end{aligned}$$

(2) Em seguida, supondo que um dos números b_2', b_3' seja $\neq 0$, podemos admitir (trocando a ordem das duas últimas equações, se necessário) que $b_2' \neq 0$. Então substituimos a terceira equação por sua soma com a segunda multiplicada por $-b_3'/b_2'$. Isto elimina o termo em y da terceira equação e o sistema anterior é, portanto, equivalente a um sistema escalonado, do tipo

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ b_2'y + c_2'z &= d_2' \\ c_3''z &= d_3''. \end{aligned}$$

Voltemos à etapa (2). Se acontecer que, após a etapa (1), se tenha $b_2' = b_3' = 0$, o sistema reduz-se a

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ c_2'z &= d_2' \\ c_3'z &= d_3'. \end{aligned}$$

As duas últimas equações podem simplesmente não existir (se $c_2' = d_2' = c_3' = d_3' = 0$), podem determinar um único valor de z (se $d_2'/c_2' = d_3'/c_3'$ ou se $c_3' = d_3' = 0$ mas $c_2' \neq 0$) ou podem ser incompatíveis (se $d_2'/c_2' \neq d_3'/c_3'$ ou se um dos c's é zero mas o d correspondente é $\neq 0$). Se as equações em z não existem, então resta a primeira, que define um plano. Se um só valor de z é determinado por essas duas últimas equações então as soluções do sistema formam uma reta, situada num plano horizontal. Se as duas equações finais são incompatíveis então o sistema não tem solução.

Finalmente, se na etapa (2) tivermos $c_3'' = 0$, o sistema será impossível (sem solução) caso $d_3'' \neq 0$. Se $c_3'' = d_3'' = 0$, o sistema será indeterminado (infinitas soluções). O conjunto das soluções é uma reta pois suas duas linhas não podem ser uma múltiplo da outra.

Exemplo 33.3 Consideremos o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \\ 4x + 7y - z &= 13. \end{aligned}$$

Multiplicamos a primeira equação por -2 e por -4 sucessivamente e a somamos à segunda e à terceira respectivamente. Estas operações conduzem ao sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ -y + 10z &= -3 \\ -y + 11z &= -3. \end{aligned}$$

Em seguida, multiplicamos a segunda equação por -1 e a somamos à terceira, obtendo o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ -y + 10z &= -3 \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Imediatamente vem $z = 0$, $y = 3$ e $x = -2$, valores que se obtêm substituindo o valor de z na segunda equação, o que fornece y e, em seguida, substituindo os valores encontrados de y e z na primeira equação a fim de obter x.

Evidentemente, ao aplicarmos as operações elementares para chegar a um sistema escalonado, as incógnitas x, y, z e os sinais $+$, $-$ e $=$ não desempenham papel algum. Ganha-se em simplicidade e concisão dispensando-os, ou seja, efetuando as operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada, retornando às equações apenas no final, quando a matriz (não aumentada) estiver escalonada. Faremos assim no exemplo seguinte.

Exemplo 33.4 Consideremos o sistema abaixo e sua matriz aumentada:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \\ 4x + 7y - 2z &= 12 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & -2 & 12 \end{bmatrix}.$$

Subtraímos da segunda linha o dobro da primeira e, da terceira, quatro vezes a primeira. Se as linhas desta matriz são L_1, L_2 e L_3, a matriz seguinte terá linhas $L_1, L_2 - 2 \cdot L_1$ e $L_3 - 4 \cdot L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \\ 0 & -1 & 10 & -4 \end{bmatrix}.$$

Substituindo a terceira linha pela diferença entre ela e a segunda, obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

a qual é a matriz aumentada do sistema escalonado

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ -y + 10z &= -3 \\ 0 \cdot z &= -1. \end{aligned}$$

Evidentemente, este sistema não possui solução. Como ele é equivalente ao sistema original, concluímos novamente que aquele sistema é impossível.

Exemplo 33.5 Usando mais uma vez a matriz aumentada, sobre cujas linhas aplicamos as operações elementares, consideramos o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \\ 4x + 7y - 2z &= 13. \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & -2 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - 4 \cdot L_1]{L_2 - 2 \cdot L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 - L_2} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A notação $L_2 - 2 \cdot L_1$ significa que a segunda linha está sendo substituida pela diferença entre ela e o dobro da primeira. As notações $L_3 - 4 \cdot L_1$ e $L_3 - L_2$ têm significados análogos.

Fomos então conduzidos à matriz aumentada do sistema escalonado

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ -y + 10z &= -3. \end{aligned}$$

Da última equação obtemos $y = 10z + 3$. Entrando com este valor na primeira equação, obtemos $x = -2 - 17z$. Vemos então que as soluções do sistema proposto são os pontos $(-2-17z, 10z+3, z)$, onde z pode ser escolhido livremente. Estes pontos formam a reta de equações paramétricas $x = -17t - 2$, $y = 10t + 3$, $z = t$.

Exemplo 33.6 Aplicando o processo de escalonamento ao sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x - 4y + 6z &= 5 \\ 4x - 6y + 9z &= 12, \end{aligned}$$

obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & 5 \\ 4 & -6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 - 2 \cdot L_1 \\ \longrightarrow \\ L_3 - 4 \cdot L_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Trocando a ordem das linhas L_2 e L_3:

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Chegamos à matriz do sistema escalonado

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2y - 3z &= -4 \\ 0 \cdot z &= -3. \end{aligned}$$

Evidentemente, este sistema não possui solução, logo o sistema original, que lhe é equivalente, também não possui.

Observação. (Sistemas de quatro equações com três incógnitas.) Consideremos o sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z &= d_4. \end{aligned} \qquad (*)$$

A eliminação gaussiana mostra que ele é equivalente ao sistema escalonado

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\ B_2y + C_2z &= D_2 \\ C_3z &= D_3 \\ 0 &= D_4. \end{aligned}$$

Portanto, a fim de que o sistema (*) possua solução, é necessário que se tenha $D_4 = 0$. Isto equivale a dizer que para o sistema (*) possuir solução é necessário que uma das linhas aumentadas L_1, L_2, L_3, L_4 seja combinação linear das outras três. Uma vez cumprida esta condição, existe solução para (*) se, e somente se, existe solução para o sistema formado pelas equações correspondentes a essas três linhas. Mais precisamente, as soluções do sistema (*) são as mesmas soluções do sistema menor, caso existam. Em particular, se três das linhas aumentadas são linearmente independentes então (*) possui solução se, e somente se, a quarta linha aumentada é combinação linear das outras três.

Exercícios

1. Resolva o sistema:

$$\begin{aligned} x + 3y + 5z + 7w &= 12 \\ 3x + 5y + 7z + w &= 0 \\ 5x + 7y + z + 3w &= 4 \\ 7x + y + 3z + 5w &= 16 \end{aligned}$$

Na sua opinião, a Regra de Cramer (que se estuda no colégio) é um método prático para resolver este sistema?

2. Determine os valores de m e n para os quais o sistema

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1 \\ x + 2y - z &= 4 \\ 3x + y + mz &= n \end{aligned}$$

é:

a) indeterminado

b) impossível.

3. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função definida por $f(x,y) = (2x + y, x - y)$. Sabe-se que a equação $f(x,y) = \lambda(x,y)$ possui solução $(x,y) \neq (0,0)$. Calcule λ.

4. Obtenha as soluções dos seguintes sistemas de equações lineares:

a)

$$\begin{aligned} x + z &= 2 \\ y + z &= 4 \\ x + y &= 5 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + 7z &= 1 \\ x - y + 6z &= 1{,}5 \\ 2y + 6z &= 2 \\ 4x - 3y + 12z &= 5 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x - 2y + z + t &= 1 \\ 2x + y - 2z + 2t &= 0 \\ x + 6y &= -2 \end{aligned}$$

5. Bronze é uma liga de cobre e zinco, na qual a porcentagem de cobre varia geralmente entre 60% e 70%. Usando dois tipos de bronze, um com 62% e outro com 70% de cobre, deseja-se obter uma tonelada de bronze com exatamente 65% de cobre. Quantos quilos do primeiro tipo de bronze e quantos quilos do segundo devem ser usados?

6. Aço fino é uma liga de ferro, cromo e níquel. Um exemplo é o aço V2A, que contém 74% de ferro, 18% de cromo e 8% de níquel. Na tabela abaixo, têm-se ligas I, II, III e IV, as quais devemos misturar para obter uma tonelada de aço V2A. Quantos quilos de cada uma dessas ligas devemos tomar?

	I	II	III	IV
Ferro	70%	72%	80%	85%
Cromo	22%	20%	10%	12%
Níquel	8%	8%	10%	3%

7. Combinando quartzo (SiO_2) com lixívia de sódio ($NaOH$) obtém-se silicato de sódio (Na_2SiO_3) e água (H_2O), na reação química indicada por

$$xSiO_2 + yNaOH \to zNa_2SiO_3 + tH_2O.$$

Os números naturais x, y, z e t devem ser tais que os elementos químicos Si, O, Na e H ocorram em iguais quantidades em ambos os lados da reação. Como podem esses números ser tomados de modo a se ter a "menor" reação química possivel?

8. Responda a questão análoga à anterior com respeito à reação

$$xFeS + yO_2 \to zFe_2O_3 + tSO_2$$

(geração de dióxido de enxofre a partir de pirita).

9. A tabela abaixo exibe as porcentagens de albumina, carbohidrato e lipídio em cada um dos alimentos A, B e C. Mostre que não é possível combinar esses alimentos formando uma refeição que contenha 47% de albumina, 35% de carbohidrato e 18% de lipídio. Investigue se seria possível caso as exigências fossem 40% de albumina, 40% de carbohidrato e 20% de lipídio.

	A	B	C
Albumina	30%	50%	20%
Carbohidrato	30%	30%	70%
Lipídio	40%	20%	10%

10. Resolva os sistemas

$$\begin{aligned} 5732x + 2134y + 2134z &= 7866 \\ 2134x + 5732y + 2134z &= 670 \\ 2134x + 2134y + 5732z &= 11464 \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} 3x + 5y + 7z + w &= 0 \\ 5x + 7y + z + 3w &= 4 \\ x + 3y + 5z + 72w &= 12 \\ 7x + y + 3z + 5w &= 16. \end{aligned}$$

11. No processo de escalonamento, se uma linha (do tipo L ou l) se anular, prove que ela era combinação linear das outras.

12. Escreva a equação de um plano vertical que contenha as soluções de ambos os sistemas a seguir. Quantos planos têm essa propriedade?

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 5 \\ x - 7y + 14z &= 13 \\ 2x + y - 5z &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x - 3y + 2z &= 12 \\ x + y - 3z &= -5 \\ 3x - 2y + 4z &= 5. \end{aligned}$$

13. Resolva cada um dos sistemas abaixo:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ x + y - z &= 1 \\ -x + y + z &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x - 4y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ 2x - y + 2z &= 2 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - 3y + z &= 2 \\ x - 2y - z &= 1 \\ 2x - 4y - 2z &= 2\,. \end{aligned}$$

14. Use escalonamento para mostrar que um sistema 3×3 cujas linhas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 são linearmente independentes possui uma única solução.

15. Aplique o processo de escalonamento a cada um dos sistemas abaixo e, a partir do resultado, identifique em qual dos oito casos da seção anterior o sistema se enquadra.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 3x - y + 2z &= 5 \\ 9x - 3y + 6z &= 16 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - 2y + 2z &= 3 \\ 2x + y - z &= 4 \\ 2x - 4y + 4z &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - y + 2z &= 5 \\ x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z &= 3 \\ 6x - 2y + 4z &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 \\ 3x + 3y - 6z &= 2 \\ 2x + 2y - 4z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + y - 3z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 2 \\ x - 5z &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x + 2y + z &= 2 \\ 3x + y + \frac{1}{2}z &= 1 \\ 2x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z &= \frac{2}{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x - 2y + 3z &= 2 \\ 3x + y - 2z &= 1 \\ x + 7y - 12z &= -1 \end{aligned}$$

16. Resolva o sistema abaixo, sabendo que $0 < a < b < c$:

$$\begin{aligned} ax + ay + cz &= a^2 + c^2 \\ bx - ay + cz &= c^2 - b^2 \\ ax + cy - bz &= a^2 - c^2 \,. \end{aligned}$$

34

Operações com Matrizes

A idéia geral de matriz do tipo $m \times n$ é a de um quadro retangular com mn elementos, dispostos em m linhas e n colunas. Na grande maioria das vezes, esses elementos são números. Matrizes são freqüentemente utilizadas para organizar dados. Por exemplo, as notas finais dos alunos de uma série no colégio podem formar uma matriz cujas colunas correspondem às matérias lecionadas naquela série e cujas linhas representam os alunos. Na interseção de uma linha com uma coluna figura um número, que é a nota daquele aluno naquela matéria.

Como vimos, as matrizes ocorrem como quadros dos coeficientes de sistemas de equações lineares. Elas também surgem em situações como a seguinte: os vetores $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2)$ podem formar as linhas de uma matriz 2×3 ou as colunas de uma matriz 3×2. Outros exemplos importantes onde ocorrem matrizes são as transformações lineares e as formas quadráticas. Matrizes são ainda usadas na teoria dos grafos e em muitas outras áreas de Matemática.

Na definição que adotaremos, uma matriz $m \times n$ é uma lista de números a_{ij}, com índices duplos, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. A matriz $\mathbf{m}$ é representada por um quadro numérico com m linhas e n colunas, no qual o elemento a_{ij} situa-se no cruzamento de i-ésima linha com a j-ésima coluna:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A lista ordenada $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ chama-se a i-*ésima linha* ou o i-*ésimo vetor-linha* da matriz $\mathbf{m}$ enquanto $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ é a j-*ésima coluna* ou o j-*ésimo vetor-coluna* de $\mathbf{m}$.

Numa extensão natural dos casos em que $k \leq 4$, que já vimos antes, a notação $\mathbb{R}^k$ indica o *espaço euclidiano* (numérico k-*dimensional*), cujos elementos são as listas ordenadas $v = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ de k números reais. Assim, as linhas de uma matriz $m \times n$ são vetores de $\mathbb{R}^n$ e as colunas pertencem a $\mathbb{R}^m$.

Na matriz $\mathbf{m}$, o elemento a_{ij} chama-se o ij-ésimo elemento de $\mathbf{m}$; escreve-se $\mathbf{m} = [a_{ij}]$.

Diz-se que a matriz $\mathbf{m}$ é *quadrada* quando tem o mesmo número de linhas e colunas.

A soma de duas matrizes do mesmo tipo $m \times n$ e o produto de uma matriz por um número são definidos elemento a elemento, imitando as operações análogas com vetores: se $\mathbf{m} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{n} = [b_{ij}]$ são matrizes $m \times n$ então $\mathbf{m} + \mathbf{n} = [a_{ij} + b_{ij}]$ e $\alpha \cdot \mathbf{m} = [\alpha a_{ij}]$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Estas operações têm as mesmas propriedades das operações de mesmo nome entre vetores, desde que estabeleçamos as convenções naturais de que a matriz nula $\mathbf{0}$ do tipo $m \times n$ é aquela cujos elementos são todos iguais a zero e que se $\mathbf{m} = [a_{ij}]$ então $-\mathbf{m} = [-a_{ij}]$.

A grande novidade operacional entre matrizes é a multiplicação, sobre a qual falaremos a seguir.

Em Álgebra Linear, as matrizes surgem principalmente associadas a transformações lineares e o produto de duas matrizes é naturalmente definido como a matriz associada à composta de duas transformações lineares.

Por exemplo, sejam $A, C\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares dadas por

$$A(x, y) = (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y)$$
$$C(x, y) = (c_1x + d_1y, c_2x + d_2y),$$

para todo $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

As matrizes dessas transformações são, respectivamente,

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$

A transformação linear $AC\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, chamada a *composta* de A e

C (ou o *produto* de A por C) é definida pondo-se

$$(AC)v = A(Cv),$$

para todo $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim, o transformado do vetor v pela transformação AC é o transformado do vetor Cv por A.

Vejamos qual é a matriz da composta AC. Para $v = (x, y)$, temos:

$$\begin{aligned}(AC)v &= A(C(x,y)) = A(c_1x + d_1y, c_2x + d_2y)\\ &= (a_1(c_1x + d_1y) + b_1(c_2x + d_2y),\ a_2(c_1x + d_1y) + b_2(c_2x + d_2y))\\ &= ((a_1c_1{+}b_1c_2)x + (a_1d_1{+}b_1d_2)y,\ (a_2c_1{+}b_2c_2)x + (a_2d_1{+}b_2d_2)y).\end{aligned}$$

Logo a matriz de AC é

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 & a_1d_1 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 & a_2d_1 + b_2d_2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz é chamada o *produto* das matrizes **a** e **c**. Escreve-se $\mathbf{m} = \mathbf{ac}$.

Observe que os elementos da matriz **ac** são obtidos tomando-se os produtos internos dos vetores-linha de **a** pelos vetores-coluna de **c** ordenadamente. Assim, por exemplo, o elemento de **ac** que está na segunda linha e primeira coluna é $a_2c_1 + b_2c_2$, produto interno do vetor (a_2, b_2), segunda linha de **a**, pelo vetor (c_1, c_2), primeira coluna de **c**.

Um exemplo mais prosaico é o seguinte.

Uma empresa, que possui duas confeitarias, chamadas A e B, fabrica três tipos de bolo: 1, 2 e 3, os quais são feitos de farinha, açúcar, leite, manteiga e ovos. Em cada semana, as vendas dessas duas confeitarias são estimadas conforme a matriz de **m** de venda semanal abaixo:

Confeitaria	Bolo tipo 1	Bolo tipo 2	Bolo tipo 3
A	50 unidades	30 unidades	25 unidades
B	20 unidades	20 unidades	40 unidades

Para a fabricação desses bolos, o material é usado de acordo com a matriz **n** seguinte:

Bolo	farinha	açúcar	leite	manteiga	ovos
tipo 1	500 g	200 g	500 ml	150 g	4
tipo 2	400 g	100 g	300 ml	250 g	5
tipo 3	450 g	150 g	600 ml	0	6

A direção da empresa, a fim de atender à demanda, quer saber a quantidade de cada uma das cinco matérias primas que deve alocar às suas duas confeitarias. A resposta deve ser uma matriz $\mathbf{p}$, do tipo 2×5, onde as linhas representam as duas confeitarias e as colunas correspondem aos cinco materiais usados.

Confeitaria	farinha	açúcar	leite	manteira	ovos
A	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}
B	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}

Assim, c_{ij} é quanto a i-ésima confeitaria deve estocar do j-ésimo material a fim de executar as vendas previstas.

Se escrevermos $\mathbf{m} = [a_{ij}]$; $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 3$ e $\mathbf{n} = [b_{ij}]$, com $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 5$, veremos facilmente que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \quad (1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq 5).$$

Assim, por exemplo, o número de ovos necessários para a confeitaria A é

$$\begin{aligned} c_{15} &= a_{11}b_{15} + a_{12}b_{25} + a_{13}b_{35} \\ &= 50 \times 4 + 30 \times 5 + 25 \times 6 = 500. \end{aligned}$$

Os dois exemplos acima sugerem a seguinte definição geral.

Sejam $\mathbf{m} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{n} = [b_{ij}]$ matrizes de tipo $m \times n$ e $n \times p$ respectivamente. O *produto* dessas matrizes é a matriz $\mathbf{mn} = [c_{ij}]$, do tipo $m \times p$, cujo ij-ésimo elemento é dado por:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Estendendo a noção análoga que já vimos em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, chama-se *produto interno* de dois vetores

$$v = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{e} \quad w = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

em $\mathbb{R}^n$ ao número

$$\langle v, w \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Assim, o ij-ésimo elemento da matriz produto $\mathbf{mn}$ é o produto interno do i-ésimo vetor-linha da matriz $\mathbf{m}$ pelo j-ésimo vetor-coluna da matriz $\mathbf{n}$.

Quando lidarmos com matrizes que têm um número pequeno de colunas (digamos ≤ 4), escreveremos a i-ésima linha na forma (a_i, b_i, c_i, d_i) em vez de $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})$. Com esta notação, o produto de duas matrizes 3×4,

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix}$$

é a matriz $\mathbf{mn}$ abaixo especificada:

$$\mathbf{mn} = \begin{bmatrix} a_1r_1 + b_1r_2 + c_1r_3 & a_1s_1 + b_1s_2 + c_1s_3 & a_1t_1 + b_1t_2 + c_1t_3 \\ a_2r_1 + b_2r_2 + c_2r_3 & a_2s_1 + b_2s_2 + c_2s_3 & a_2t_1 + b_2t_2 + c_2t_3 \\ a_3r_1 + b_3r_2 + c_3r_3 & a_3s_1 + b_3s_2 + c_3s_3 & a_3t_1 + b_3t_2 + c_3t_3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 34.1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 20 & 26 \\ 15 & 47 & 62 \\ 24 & 74 & 98 \end{bmatrix}$$

A *matriz identidade* $n \times n$ é a matriz $\mathbf{I_n} = [\delta_{ij}]$ cujos elementos são $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ii} = 1$. Assim,

$$\mathbf{I_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se $\mathbf{m} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{I_n} = \mathbf{m}$ e $\mathbf{I_n} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m}$ sempre que esses produtos estiverem bem definidos, isto é, o número de colunas do primeiro fator for igual ao número de linhas do segundo.

O produto de matrizes é associativo: $(\mathbf{mn})\mathbf{p} = \mathbf{m}(\mathbf{np})$ e distributivo: $(\mathbf{m}+\mathbf{n})\mathbf{p} = \mathbf{mp}+\mathbf{np}$, $\mathbf{m}(\mathbf{n}+\mathbf{p}) = \mathbf{mn}+\mathbf{mp}$. Mas há quatro diferenças fundamentais entre o produto de matrizes e o produto de números.

A primeira é que o produto $\mathbf{mn}$ não está definido para quaisquer matrizes $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$, pois só faz sentido quando o número de colunas de $\mathbf{m}$ é igual ao número de linhas de $\mathbf{n}$.

A segunda é que o produto $\mathbf{mn}$ não é comutativo. Mesmo que $\mathbf{mn}$ e $\mathbf{nm}$ existam, não se tem necessariamente $\mathbf{mn} = \mathbf{nm}$.

Exemplo 34.2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 41 & 49 & 57 \\ 52 & 62 & 72 \end{bmatrix}.$$

Compare este resultado com o exemplo anterior, em que as mesmas matrizes foram multiplicadas na ordem inversa.

A terceira diferença é que o produto de duas matrizes não-nulas pode ser a matriz nula: de $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ não se infere que $\mathbf{mn} \neq \mathbf{0}$. Pode até ocorrer que $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ seja tal que $\mathbf{m}^2 = \mathbf{0}$, como no exemplo abaixo.

Exemplo 34.3 Se

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

então $\mathbf{m}^2 = \mathbf{0}$.

A quarta diferença entre o produto de matrizes e o produto de números é que todo número a diferente de zero possui o inverso multiplicativo $a^{-1} = 1/a$ pois $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Por outro lado, dada a matriz quadrada $\mathbf{m}$, do tipo $n \times n$, mesmo que seja $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$, nem sempre existe uma matriz $\mathbf{p}$, do tipo $n \times n$, tal que $\mathbf{mp} = \mathbf{pm} = \mathbf{I_n}$. Quando uma tal matriz $\mathbf{p}$ existe, a matriz m se diz *invertível* e $\mathbf{p}$ chama-se a matriz inversa de $\mathbf{m}$. Escreve-se então $\mathbf{p} = \mathbf{m}^{-1}$.

Exemplo 34.4 Dada uma matriz $\mathbf{m}$ do tipo $n \times n$ tal que $\mathbf{m}^2 = \mathbf{0}$ (vide exemplo anterior), não pode existir uma matriz $\mathbf{p}$ tal que $\mathbf{mp} = \mathbf{pm} = \mathbf{I}_n$. Com efeito, se uma tal $\mathbf{p}$ existisse teríamos

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{pm} \cdot \mathbf{mp} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{m}^2 \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{0} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0},$$

um absurdo. Por outro lado, se

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{bmatrix} -1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & -1/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & -1/9 \end{bmatrix}$$

é a inversa de $\mathbf{m}$, conforme se verifica efetuando os produtos $\mathbf{mp}$ e $\mathbf{pm}$.

Um sistema de equações lineares como

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

pode ser interpretado, em termos matriciais, do seguinte modo: consideramos as matrizes

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{e } \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

de tipos 3×3, 3×1 e 3×1 respectivamente. Então o sistema dado se escreve como

$$\mathbf{mx} = \mathbf{d}.$$

Se a matriz $\mathbf{m}$ possuir uma inversa $\mathbf{m}^{-1}$, o conhecimento de $\mathbf{m}^{-1}$ permite resolver o sistema multiplicando ambos os membros da igualdade acima, à esquerda, por $\mathbf{m}^{-1}$, o que nos dá a elegante resposta:

$$\mathbf{x} = \mathbf{m}^{-1}\mathbf{d}.$$

Acontece, porém, que o problema de determinar a matriz inversa $\mathbf{m}^{-1}$ (mesmo quando se sabe que ela existe) é muito mais trabalhoso do que resolver diretamente o sistema por escalonamento. Por isso, embora a matriz inversa $\mathbf{m}^{-1}$ seja um objeto teoricamente muito interessante, ao contrário do que às vezes se diz, não é o instrumento mais eficaz para resolver um sistema de equações lineares.

Observação 34.1 A definição da matriz inversa $\mathbf{m}^{-1}$ exige que

$$\mathbf{m}\mathbf{m}^{-1} = \mathbf{m}^{-1}\mathbf{m} = \mathbf{I}_3,$$

mas a solução do sistema $\mathbf{mx} = \mathbf{d}$ acima obtida usa apenas o fato de que $\mathbf{m}^{-1}\mathbf{m} = \mathbf{I}_3$. Isto sugere naturalmente a pergunta: dada a matriz $\mathbf{m}$, do tipo 3×3, suponha que exista uma matriz $\mathbf{p}$, ainda do tipo 3×3, tal que $\mathbf{pm} = \mathbf{I}_3$. Tem-se então necessariamente $\mathbf{mp} = \mathbf{I}_3$? A resposta é afirmativa, conforme mostraremos agora.

Com efeito, se $\mathbf{pm} = \mathbf{I}_3$, então qualquer sistema $\mathbf{mx} = \mathbf{d}$ possui a solução única $\mathbf{x} = \mathbf{pd}$. Logo as linhas de $\mathbf{m}$ são L.I..

Reciprocamente, se as linhas de $\mathbf{m}$ são L.I. então, resolvendo os sistemas $\mathbf{mx} = \mathbf{e_1}$, $\mathbf{mx} = \mathbf{e_2}$ e $\mathbf{mx} = \mathbf{e_3}$, obtemos as três colunas de uma matriz $\mathbf{q}$ tal que $\mathbf{mq} = \mathbf{I_3}$. Daí resulta que

$$\mathbf{p} = \mathbf{pI_3} = \mathbf{p(mq)} = \mathbf{(pm)q} = \mathbf{I_3 q} = \mathbf{q}.$$

Logo $\mathbf{pm} = \mathbf{I_3}$ implica $\mathbf{mp} = \mathbf{I_3}$, ou seja, $\mathbf{p} = \mathbf{m}^{-1}$.

Exercícios

1. Sejam

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{e } \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Determine as matrizes $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ tais que $\mathbf{m} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w}$ e $\mathbf{m}' \cdot \mathbf{v}' = \mathbf{0}$.

2. Considere as linhas de uma matriz 3×3 como matrizes 1×3 e as colunas como matrizes 3×1. Sejam $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$ matrizes 3×3. Se as linhas de $\mathbf{m}$ são $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ e as colunas de $\mathbf{n}$ são $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$, mostre que as linhas de $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$ são $\mathbf{u_1} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{u_2} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{u_3} \cdot \mathbf{n}$ e as colunas de $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$ são $\mathbf{m} \cdot \mathbf{v_1}$, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{v_2}$, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{v_3}$.

3. Seja $\mathbf{m}$ uma matriz 3×3 cujas linhas são linearmente independentes. Considere

$$\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo os sistemas $\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e_1}$, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e_2}$ e $\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e_3}$, mostre que existe uma única matriz $\mathbf{n}$, do tipo 3×3, tal que $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{I_3}$.

4. Na matriz $\mathbf{m}$ abaixo, supomos que a primeira linha é não-nula e na matriz $\mathbf{n}$ supomos que as duas primeiras linhas são não-colineares. Prove que duas das colunas de $\mathbf{m}$ são múltiplos da restante e que uma das colunas de $\mathbf{n}$ é combinação linear das outras duas:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ na_1 & nb_1 & nc_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 & \alpha s_1 + \beta s_2 & \alpha t_1 + \beta t_2 \end{bmatrix}.$$

5. Num exercício anterior, o *posto* de uma matriz 3×3 foi definido como o número máximo de linhas linearmente independentes. Prove que o posto também é igual ao número máximo de colunas linearmente independentes.

6. Seja $p(\mathbf{m}) = 2\mathbf{m^3} - 5\mathbf{m^2} + 7\mathbf{m} - 6\mathbf{I_3}$. Se $\mathbf{n}$ é invertível mostre que $\mathbf{n^{-1}} p(\mathbf{m}) \mathbf{n} = p(\mathbf{n^{-1}mn})$.

7. Dada a matriz

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix},$$

mostre que $\mathbf{m^2} = \mathbf{I_2}$. Ache números α, β tais que a matriz $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{m} + \beta\mathbf{I_2}$ cumpra $\mathbf{p^2} = \mathbf{p}$ e seja não-nula. A partir daí, encontre uma matriz não-nula $\mathbf{q}$ tal que $\mathbf{pq} = \mathbf{qp} = \mathbf{0}$.

8. Prove que, para matrizes 3×4, o número máximo de colunas linearmente independentes é igual ao número máximo de linhas linearmente independentes. (Posto da matriz.)

9. Prove que um sistema de 3 equações lineares com 3 incógnitas possui solução se, e somente se, o posto da matriz dos coeficientes é igual ao posto da matriz aumentada. (Teorema de Rouché.)

10. Seja $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Resolva dois sistemas 2×2 para achar uma matriz $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ tal que $\mathbf{mp} = \mathbf{I_2}$.

11. Quais das matrizes abaixo tem uma linha que é combinação linear das outras duas?

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

12. Sejam $\mathbf{m}, \mathbf{p}$ matrizes 3×3. Se uma das linhas de $\mathbf{m}$ é múltiplo de outra ou combinação linear das outras duas, prove que o mesmo ocorre com o produto $\mathbf{mp}$. Conclua que, nestas condições, $\mathbf{mp}$ não é invertível.

13. Usando as matrizes

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix},$$

definimos as transformações lineares $M, N\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, pondo

$$M(x, y, z) = (a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z, a_3x + b_3y + c_3z)$$
$$N(x, y, z) = (r_1x + s_1y + t_1z, r_2x + s_2y + t_2z, r_3x + s_3y + t_3z).$$

Diz-se que $\mathbf{m}$ é a matriz de M e $\mathbf{n}$ é a matriz de N. Mostre que a composta $N \circ M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear cuja matriz é o produto $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}$.

14. Seja $\mathbf{m}$ a matriz da transformação linear $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Prove que a imagem de M é uma reta que passa pela origem, um plano que passa pela origem ou todo o espaço $\mathbb{R}^3$, conforme o posto da matriz de M seja $1, 2$ ou 3 respectivamente.

15. Prove que a multiplicação de matrizes é uma operação associativa: $(\mathbf{mn})\mathbf{p} = \mathbf{m}(\mathbf{np})$.

35

Determinantes

O determinante de uma matriz 2×2 surge freqüentemente em questões da Geometria Analítica Plana. Se

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix},$$

definimos $\det \mathbf{m} = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Faremos agora o estudo do determinante de uma matriz 3×3. O caso geral, de uma matriz $n \times n$, pode ser tratado de modo análogo, com uma notação mais complicada porém seguindo os mesmos princípios.

O *determinante* da matriz

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

é o número

$$\Delta = \det \mathbf{m} = a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 + a_2 b_3 c_1 - a_1 b_3 c_2.$$

Ele é a soma de $6 = 3!$ parcelas, cada uma das quais é um produto de três fatores, pertencendo esses 3 fatores a linhas e a colunas diferentes. Assim, cada uma das seis parcelas é um produto do tipo abc, com os índices $1, 2, 3$ aparecendo, cada um uma vez, em todas essas parcelas. A ordem em que esses índices aparecem é relevante. Ela corresponde às permutações de $1, 2, 3$. As permutações $123, 312$ e 231 aparecem nas parcelas precedidas do sinal + enquanto as permutações $213, 321$ e 132

correspondem às parcelas precedidas do sinal $-$. As três primeiras são chamadas as permutações pares. Elas são obtidas quando se tomam três números consecutivos quaisquer na seqüência

$$123123123123...$$

As outras são as *permutações ímpares*, que se obtêm trocando as posições de 2 elementos numa permutação par ou então escolhendo três números consecutivos quaisquer na seqüência

$$321321321321...$$

Sejam $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = (a_2, b_2, c_2)$ e $w = (a_3, b_3, c_3)$ os três vetores de $\mathbb{R}^3$ que correspondem às três linhas da matriz $\mathbf{m}$ acima. Quando quizermos enfatizar a dependência do determinante de $\mathbf{m}$ em relação a esses vetores, escreveremos

$$\det \mathbf{m} = \det[u, v, w].$$

A seguir, faremos uma lista das propriedades básicas do determinante.

1. O determinante muda de sinal quando se trocam as posições de duas quaisquer de suas linhas. Assim, tem-se

$$\det[v, u, w] = -\det[u, v, w],$$
$$\det[w, v, u] = -\det[u, v, w] \text{ e } \det[u, w, v] = -\det[u, v, w].$$

2. Se uma matriz tem duas linhas iguais, seu determinante é igual a zero. Assim, $\det[u, u, w] = \det[u, v, u] = \det[u, v, v] = 0$.

3. Se multiplicarmos uma linha da matriz por um número, o determinante fica multiplicado por aquele número. Assim $\det[\alpha \cdot u, v, w] = \det[u, \alpha \cdot v, w] = \det[u, v, \alpha \cdot w] = \alpha \det[u, v, w]$.

4. Se uma linha da matriz é soma de duas parcelas (vetoriais) seu determinante é soma de dois outros, em cada um dos quais aquela linha é substituída por uma das parcelas. Assim $\det[u+u', v, w] = \det[u, v, w] + \det[u', v, w]$, valendo igualdades semelhantes para a segunda e a terceira linhas.

5. Se uma linha da matriz é combinação linear das outras duas, o determinante dessa matriz é zero. Assim, $\det[\alpha \cdot v + \beta \cdot w, v, w] = \det[u, \alpha \cdot u + \beta \cdot w, w] = \det[u, v, \alpha \cdot u + \beta \cdot v] = 0$.

6. O determinante não se altera se substituirmos uma de suas linhas pela soma dela com um múltiplo de outra. Assim, por exemplo, $\det[u + \alpha \cdot v, v, w] = \det[u, v, w]$.

7. Tem-se $\det[u, v, w] = 0$ se, e somente se, os vetores u, v, w são linearmente dependentes, isto é, um deles é combinação linear dos demais.

8. O determinante não se altera quando se trocam as linhas pelas colunas e vice-versa.

Podemos reformular a última propriedade acima do seguinte modo. As matrizes

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{m}^\top = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

são tais que as linhas da segunda coincidem com as colunas da primeira, na mesma ordem. Diz-se então que $\mathbf{m}^\top$ é a *transposta* da matriz $\mathbf{m}$. A propriedade 8 significa que as matrizes $\mathbf{m}$ e $\mathbf{m}^\top$ têm o mesmo determinante.

Passemos agora às demonstrações dessas oito propriedades. Parece uma tarefa pesada mas, na realidade, são provas bastante simples.

1. Para mostrar que $\det[v, u, w] = -\det[u, v, w]$ basta observar que, a fim de passar da expressão de $\det[u, v, w]$ para a expressão de $\det[v, u, w]$, basta trocar, em cada parcela, os índices 1 e 2. Ora, invertendo as posições de 1 e 2 (deixando 3 fixo) faz com que cada permutação par se torne ímpar e vice-versa. Portanto, passa-se de $\det[u, v, w]$ para $\det[v, u, w]$ trocando o sinal de cada parcela. Então $\det[v, u, w] = -\det[u, v, w]$. Mesmo argumento para as outras duas inversões.

2. Se uma matriz tem duas linhas iguais então, trocando-se as posições dessas duas linhas, seu determinante deveria mudar de sinal, pela Propriedade 1. Entretanto, como a matriz não mudou com essa troca, seu determinante também não muda. Portanto $\det[u, u, v] = -\det[u, u, v]$ e daí $\det[u, u, v] = 0$.

3. Isto é imediato pois cada parcela de $\det[u, v, w]$ contém exatamente um fator de cada linha.

4. Sejam $u = (a_1, b_1, c_1)$, $u' = (a'_1, b'_1, c'_1)$ e $u + u' = (a_1 + a'_1, b_1 + b'_1, c_1 + c'_1)$. As parcelas de $\det[u + u', v, w]$ são do tipo $(a_i + a'_i)b_jc_k = a_ib_jc_k + a'_ib_jc_k$, ou $a_i(b_j + b'_j)c_k = a_ib_jc_k + a_ib'_jc_k$ ou então $a_ib_j(c_k + c'_k) = a_ib_jc_k + a_ib_jc'_k$. Segue-se daí que

$$\det[u + u', v, w] = \det[u, v, w] + \det[u', v, w].$$

5. Em virtude das propriedades 4, 3 e 2 temos:

$$\begin{aligned}\det[\alpha \cdot v + \beta \cdot w, v, w] &= \det[\alpha \cdot v, v, w] + \det[\beta \cdot w, v, w] \\ &= \alpha \det[v, v, w] + \beta \det[w, v, w] \\ &= \alpha 0 + \beta 0 = 0.\end{aligned}$$

6. Pelas propriedades 4, 3 e 2 podemos escrever:

$$\begin{aligned}\det[u + \alpha \cdot v, v, w] &= \det[u, v, w] + \det[\alpha \cdot v, v, w] \\ &= \det[u, v, w] + \alpha \det[v, v, w] = \det[u, v, w].\end{aligned}$$

7. Segue-se da propriedade 5 que se $\det[u, v, w] \neq 0$ então as linhas u, v, w são linearmente independentes. Para provar a recíproca, notemos que a independência linear de u, v, w implica que todo sistema cuja matriz de coeficientes é $\mathbf{m}$ tem solução única. Portanto, escalonando a matriz $\mathbf{m}$ obtem-se

$$\mathbf{m}' = \begin{bmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ 0 & b'_2 & c'_2 \\ 0 & 0 & c'_3 \end{bmatrix}$$

com $a'_1 \cdot b'_2 \cdot c'_3 \neq 0$. Ora, por um lado, a própria definição de determinante nos dá $a'_1 \cdot b'_2 \cdot c'_3 = \det \mathbf{m}'$. E, por outro lado, a propriedade 6 nos diz que, ao se escalonar uma matriz quadrada, seu determinante, no máximo, muda de sinal (se fizermos um número ímpar de troca de linhas). Logo $\det \mathbf{m} = \pm \det \mathbf{m}' \neq 0$.

Segue-se imediatamente da propriedade 7 que o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

possui uma única solução (x, y, z) se, e somente se, a matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

tem determinante diferente de zero. Como se vê, esta condição não depende dos números d_1, d_2, d_3 que aparecem nos segundo membros das equações.

8. A matriz transposta $\mathbf{m}^\top$ tem as linhas (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) e (A_3, B_3, C_3), onde $A_1 = a_1$, $B_1 = a_2$, $C_1 = a_3$, $A_2 = b_1$, $B_2 = b_2$, $C_2 = b_3$, $A_3 = c_1$, $B_3 = c_2$ e $C_3 = c_3$. Escrevendo a expressão de $\det \mathbf{m}^\top$ de acordo com a definição dada, obtemos

$$\begin{aligned} \det \mathbf{m}^\top &= A_1B_2C_3 - A_2B_1C_3 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 + A_2B_3C_1 - A_1B_3C_2 \\ &= a_1b_2c_3 - b_1a_2c_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 + b_1c_2a_3 - a_1c_2b_3 = \det \mathbf{m}. \end{aligned}$$

Resulta imediatamente da propriedade 8 que as afirmações feitas nas sete propriedades anteriores a respeito das linhas da matriz $\mathbf{m}$ valem também para colunas. Por exemplo, o determinante muda de sinal quando se invertem as posições de duas de suas colunas. Ou então: um determinante é nulo, se, e somente se, suas colunas são linearmente dependentes (em particular, se duas de suas colunas são iguais).

Para enunciar a próxima propriedade dos determinantes vamos precisar de uma definição.

Sejam $\mathbf{m}$ uma matriz 3×3 e p um elemento de $\mathbf{m}$. Omitindo-se de $\mathbf{m}$ a linha e a coluna que se cruzam em p, obtém-se uma matriz 2×2, cujo determinante P se chama o *menor* relativo ao elemento p.

Assim, os menores da matriz

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

são

$$\begin{aligned}
A_1 &= b_2c_3 - b_3c_2 = \text{menor de } a_1,\\
A_2 &= b_1c_3 - b_3c_1 = \text{menor de } a_2,\\
A_3 &= b_1c_2 - b_2c_1 = \text{menor de } a_3,\\
B_1 &= a_2c_3 - a_3c_2 = \text{menor de } b_1,\\
B_2 &= a_1c_3 - a_3c_1 = \text{menor de } b_2,\\
B_3 &= a_1c_2 - a_2c_1 = \text{menor de } b_3,\\
C_1 &= a_2b_3 - a_3b_2 = \text{menor de } c_1,\\
C_2 &= a_1b_3 - a_3b_1 = \text{menor de } c_2,\\
C_3 &= a_1b_2 - a_2b_1 = \text{menor de } c_3.
\end{aligned}$$

9. Desenvolvimento de um determinante segundo os elementos de uma linha:

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{m} &= a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1 = -a_2A_2 + b_2B_2 - c_2C_2\\
&= a_3A_3 - b_3B_3 + c_3C_3.
\end{aligned}$$

A expressão $a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1$ é o desenvolvimento de $\det \mathbf{m}$ segundo os elementos da primeira linha. As duas expressões seguintes chamam-se os desenvolvimentos de $\det \mathbf{m}$ segundo os elementos da segunda e da terceira linha respectivamente. O sinal que precede o produto pP do elemento p pelo seu menor P é $+$ ou $-$ conforme se tenha $i + j$ par ou ímpar, onde p está na interseção da i-ésima linha com a j-ésima coluna. Assim, por exemplo, no desenvolvimento de $\det \mathbf{m}$ segundo os elementos da segunda linha, o produto a_2A_2 vem precedido do sinal $-$ porque a_2 está no cruzamento da segunda linha com a primeira coluna $(i = 2, j = 1)$ e $2 + 1 = 3$ é ímpar.

A demonstração das fórmulas acima é imediata: basta pôr em evidência, por exemplo, a_1, b_1 e c_1 nas parcelas em que eles aparecem na definição de $\det \mathbf{m}$. Isto nos dá $\det \mathbf{m} = a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1$. As demais fórmulas são análogas.

Evidentemente, vale também a propriedade:

10. Desenvolvimento segundo os elementos de uma coluna:

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{m} &= a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3 = -b_1B_1 + b_2B_2 - b_3B_3\\
&= c_1C_1 - c_2C_2 + c_3C_3.
\end{aligned}$$

O cálculo de determinantes por meio do desenvolvimento segundo linhas ou colunas é às vezes bem útil, principalmente quando há uma linha ou coluna com um ou mais elementos iguais a zero.

Exemplo 35.1 Calculando o determinante por desenvolvimento segundo a primeira coluna, que contém um zero:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} - 4 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-2) - 4 \cdot (-5) = 18.$$

Observação 35.1 Seja $\mathbf{m}$ uma matriz cujas linhas são $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = (a_2, b_2, c_2)$ e $w = (a_3, b_3, c_3)$. O desenvolvimento de Laplace fornece uma demonstração de que $\det \mathbf{m} = 0$ implica que u, v e w são linearmente dependentes. Com efeito, desenvolvendo $\det \mathbf{m}$ segundo os elementos da primeira linha, temos $\det \mathbf{m} = a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1 = 0$. Isto significa que os vetores $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $V = (A_1, -B_1, C_1)$ são ortogonais. Um cálculo fácil mostra que o vetor

$$V = (b_2c_3 - b_3c_2, a_3c_2 - a_2c_3, a_2b_3 - a_3b_2)$$

é ortogonal aos vetores-linha v e w. Se V for zero então v e w são colineares, logo u, v, w são L.D. Se $V \neq 0$ então os vetores u, v e w, sendo ortogonais a V, são coplanares, portanto são L.D.. Ver também o Exercício 7 desta seção.

Exercícios

1. Quantas multiplicações precisam ser feitas para calcular um determinante a partir da definição? E pelo desenvolvimento segundo uma linha ou coluna? (Não conte adições ou subtrações.)
2. Prove que os vetores $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2)$ são linearmente independentes se, e somente se,
$$\left(\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\right)^2 + \left(\det \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}\right)^2 + \left(\det \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}\right)^2 \neq 0.$$
3. Seja f uma função que faz corresponder a cada par de vetores $v = (a_1, b_1)$, $w = (a_2, b_2)$ um número real $f(v, w)$. (Noutras palavras, tem-se uma função, $f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.) Suponha que f tem as seguintes propriedades para quaisquer $v, v', w \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

a) $f(v,w) = -f(w,v)$;
b) $f(v+v',w) = f(v,w) + f(v',w)$;
c) $f(\alpha v,w) = \alpha \cdot f(v,w)$;
d) Se $v = (1,0)$ e $w = (0,1)$ então $f(v,w) = 1$.

Prove que $f(v,w) = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

4. Calcule o determinante da matriz de Vandermonde:

$$\begin{bmatrix} m^2 & m & 1 \\ n^2 & n & 1 \\ p^2 & p & 1 \end{bmatrix}$$

Sem calcular o determinante, mostre diretamente que se m, n e p são três números distintos então a matriz acima tem posto 3 (isto é, suas linhas são linearmente independentes).

5. Use o exercício acima para mostrar que, dados números reais $x_1 < x_2 < x_3$ e y_1, y_2, y_3 quaisquer, existe um único polinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$, de grau ≤ 2, tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

6. Seja $\mathbf{m}'$ uma matriz 3×3 obtida de $\mathbf{m}$ pelo processo de escalonamento. Prove que $\det \mathbf{m}' = (-1)^i \det \mathbf{m}$, onde i é o número de vezes em que foi feita alguma troca de posição entre 2 linhas.

7. Seja $\mathbf{m}$ uma matriz 3×3 escalonada. Prove que $\det \mathbf{m}$ é o produto dos elementos da diagonal principal. Conclua que se $\det \mathbf{m} = 0$ então a última linha de $\mathbf{m}$ é nula. Deduza daí que se uma matriz 3×3 tem determinante nulo, alguma de suas linhas é combinação linear das outras duas. (Perceba que isto dá outra demonstração para a propriedade 7.)

8. Seja f uma função que associa a cada matriz 3×3, cujas linhas são u, v e w, um número $f(u,v,w)$ de tal modo que valham as propriedades 1, 3 e 4 vistas acima para o determinante. Se $f(e_1, e_2, e_3) = k$, mostre que $f(u,v,w) = k\cdot\det[u,v,w]$ para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. (Sugestão: escreva $u = a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3$, $v = a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3$, $w = a_3e_1 + b_3e_2 + c_3e_3$ e desenvolva $f(u,v,w)$ segundo as propriedades 1, 3 e 4.)

9. Sejam $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$ matrizes tais que o número de colunas de $\mathbf{m}$ é igual ao número de linhas de $\mathbf{n}$. Prove que $(\mathbf{mn})^T = \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{m}^T$.

10. Sejam u, v, w vetores linearmente independentes. Mostre que, para quaisquer vetores x, y, z, existe um número A tal que $\det(x,y,z) = A \cdot \det(u,v,w)$. Conclua que $\det(u,v,w) \neq 0$, obtendo assim nova demonstração da propriedade 7. [Exprima x, y, z como combinações lineares de u, v, w e use as propriedades 1, 3 e 4.]

36

A Regra de Cramer

A regra de Cramer é um dos métodos mais tradicionais para resolver sistemas de equações lineares. Ela apresenta a vantagem de fornecer explicitamente os valores das incógnitas como quocientes de dois determinantes. Mas, por outro lado, possui dois inconvenientes em comparação com o método de escalonamento. O primeiro é que ela só se aplica quando o determinante da matriz do sistema é diferente de zero, ou seja, quando o sistema possui uma única solução. O segundo inconveniente é o custo operacional: dá mais trabalho calcular quatro determinantes do que escalonar uma única matriz 3×3. Esse custo cresce espantosamente para sistemas $n \times n$ com n grande.

Consideremos, portanto, o sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3, \end{aligned}$$

no qual supomos que a matriz $\mathbf{m}$ dos coeficientes tenha determinante diferente de zero. Como sabemos, esta hipótese equivale a admitir que as linhas de $\mathbf{m}$ são linearmente independentes e portanto que o sistema possui uma única solução. A regra de Cramer exprime essa solução por meio de determinantes.

Para deduzir a regra de Cramer, em vez de operar com as linhas da matriz, como vimos fazendo até agora, trabalharemos com os vetores-coluna:

$$a = (a_1, a_2, a_3),\ b = (b_1, b_2, b_3),\ c = (c_1, c_2, c_3) \text{ e } d = (d_1, d_2, d_3).$$

Em termos desses vetores, as 3 equações numéricas que constituem o sistema dado se exprimem como uma única equação vetorial. Mais precisamente, elas dizem que o vetor $\mathfrak{d}$ é uma combinação linear dos vetores $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$:

$$x \cdot \mathfrak{a} + y \cdot \mathfrak{b} + z \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{d}.$$

Daí resulta, pelas propriedades 4, 3 e 2, que:

$$\begin{aligned} \det[\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}] &= \det[x \cdot \mathfrak{a} + y \cdot \mathfrak{b} + z \cdot \mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}] \\ &= x \det[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}] + y \det[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}] + z \det[\mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}] \\ &= x \det[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}], \end{aligned}$$

portanto

$$x = \frac{\det[\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}]}{\det[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}]}.$$

Analogamente, tem-se

$$\det[\mathfrak{a}, \mathfrak{d}, \mathfrak{c}] = y \det[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}] \text{ e } \det[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}] = z \det[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}],$$

logo

$$y = \frac{\det[\mathfrak{a}, \mathfrak{d}, \mathfrak{c}]}{\det[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}]}, \quad z = \frac{\det[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}]}{\det[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}]}.$$

Estas três fórmulas, que fornecem os valores das incógnitas x, y, z em termos de determinantes, constituem a regra de Cramer.

Observação 36.1 A regra de Cramer só se aplica quando a matriz dos coeficientes do sistema tem determinante diferente de zero. Tentar utilizá-la fora desse caso pode conduzir a erros. Um desses erros é o seguinte: quando os 4 determinantes que aparecem na regra são todos iguais a zero, poder-se-ia pensar que ela fornece $x = 0/0$, $y = 0/0$, $z = 0/0$ e concluir que o sistema é indeterminado, isto é, possui infinitas soluções. Mas não é bem assim. Suponhamos, por exemplo, que os três vetores-coluna $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ sejam múltiplos um do outro mas que o vetor $\mathfrak{d}$ não seja múltiplo deles. Então os quatro determinantes são nulos mas não existem números x, y, z tais que $x \cdot \mathfrak{a} + y \cdot \mathfrak{b} + z \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{d}$, isto é, o sistema não tem solução.

Exemplo 36.1 Consideremos o sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x + 3y + 3z &= 4. \end{aligned}$$

É claro que este sistema não tem solução pois se $x+y+z=1$ então $3x+3y+3z$ deve ser igual a 3 e não 4. Apesar disso, a regra de Cramer (usada incorretamente, pois foi deduzida mediante a hipótese de que $\det[a,b,c] \neq 0$) nos levaria às "expressões indeterminadas" $x = 0/0$, $y = 0/0$, $z = 0/0$ e à falsa conclusão de que o sistema é indeterminado.

Observação 36.2 Resulta da fórmula $\det[d,b,c] = x\det[a,b,c]$ e suas análogas para y e z que, se $\det[a,b,c] = 0$ e algum dos determinantes $\det[d,b,c]$, $\det[a,d,c]$ ou $\det[a,b,d]$ for $\neq 0$, então o sistema é impossível.

Observação 36.3 Vimos que há duas interpretações "duais" para um sistema de 3 equações a 3 incógnitas. Se olhamos para as linhas, podemos vê-lo como três planos no espaço e as soluções são os pontos comuns a esses planos. Se olharmos para as colunas, vê-lo-emos como um vetor d, que se procura exprimir como combinação linear de três vetores dados a, b, c. Neste caso, as soluções do sistema serão os coeficientes x, y, z da combinação linear $d = x \cdot a + y \cdot b + z \cdot c$.

Poder-se-ia pensar que o tratamento segundo linhas, ao qual demos prioridade nas Seções 30 a 32, é o único geométrico pois lida com planos no espaço, enquanto o tratamento segundo colunas é algébrico, pois cuida de combinações lineares. Entretanto, olhando para as colunas vê-se facilmente que, se os vetores a, b, c são coplanares, o sistema não admite solução a menos que o vetor d esteja nesse plano. Isto é uma conclusão geométrica.

Assim, ao analisar um sistema linear, é vantajoso não ter espírito preconcebido, encarando-o sob vários aspectos: linhas, colunas, interseção de planos, combinações lineares e determinantes. A confluência dessas várias interpretações ilustra muito bem a riqueza de um assunto, aparentemente elementar, porém de grande utilidade na Matemática e em suas aplicações.

Exemplo 36.2 Resolver o sistema

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + 3z &= 2 \\ 4x + 4y + 5z &= 3 \end{aligned}$$

usando a regra de Cramer. As colunas são $a = (1,2,4)$, $b = (1,3,4)$, $c = (2,3,5)$ e $d = (1,2,3)$. Temos $\det[a,b,c] = -3$, $\det[d,b,c] = 0$, $\det[a,d,c] = -1$ e $\det[a,b,d] = -1$. Portanto $x = 0$, $y = 1/3$ e $z = 1/3$.

Exercícios

1. Dado um sistema 3×3 com determinante $\neq 0$, calcule o número de multiplicações e divisões necessárias para resolvê-lo

a) pela regra de Cramer, calculando os determinantes a partir da definição;

b) pela regra de Cramer, calculando os determinantes mediante a expansão segundo uma linha ou uma coluna;

c) pelo método da eliminação gaussiana.

2. Seja $\mathbf{m}$ uma matriz 3×3 com $\det \mathbf{m} = \Delta \neq 0$. Chama-se *adjunta clássica* de $\mathbf{m}$ a matriz

$$\text{Adj} \cdot \mathbf{m} = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & A_3 \\ -B_1 & B_2 & -B_3 \\ C_1 & -C_2 & C_3 \end{bmatrix},$$

onde indicamos genericamente por P o menor relativo ao elemento p da matriz $\mathbf{m}$. Use a regra de Cramer para mostrar que as colunas da adjunta clássica de $\mathbf{m}$ são as soluções dos sistemas $\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} = \Delta \mathbf{e_1}$, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} = \Delta \mathbf{e_2}$, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} = \Delta \mathbf{e_3}$, respectivamente, e conclua que, pondo $\mathbf{n} = \text{adj} \cdot \mathbf{m}/\Delta$, tem-se $\mathbf{mn} = \mathbf{I_3}$.

3. Efetuando a multiplicação das matrizes, mostre diretamente que $\mathbf{m} \cdot (\text{adj} \cdot \mathbf{m}) = \det \mathbf{m} \cdot \mathbf{I_3}$.

4. Usando a transposta $\mathbf{m}^{\mathsf{T}}$, mostre que, se $\det \mathbf{m} \neq 0$ então existe uma matriz $\mathbf{p}$ tal que $\mathbf{pm} = \mathbf{I_3}$.

37

O Determinante do Produto de Duas Matrizes

Se $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$ são matrizes 2×2, uma verificação extremamente simples mostra que o determinante da matriz-produto $\mathbf{mn}$ é igual ao produto $\det \mathbf{m} \cdot \det \mathbf{n}$. Mostraremos agora que a fórmula $\det \mathbf{mn} = \det \mathbf{m} \cdot \det \mathbf{n}$ vale também para matrizes 3×3. Na verdade, nosso método de demonstração se estende diretamente para o caso geral de matrizes $n \times n$.

Consideremos portanto as matrizes

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix},$$

cujo produto é a matriz $\mathbf{mn}$ definida por

$$\begin{bmatrix} a_1r_1 + b_1r_2 + c_1r_3 & a_1s_1 + b_1s_2 + c_1s_3 & a_1t_1 + b_1t_2 + c_1t_3 \\ a_2r_1 + b_2r_2 + c_2r_3 & a_2s_1 + b_2s_2 + c_2s_3 & a_2t_1 + b_2t_2 + c_2t_3 \\ a_3r_1 + b_3r_2 + c_3r_3 & a_3s_1 + b_3s_2 + c_3s_3 & a_3t_1 + b_3t_2 + c_3t_3 \end{bmatrix}.$$

Se indicarmos com

$$u = (r_1, s_1, t_1),\ v = (r_2, s_2, t_2) \text{ e } w = (r_3, s_3, t_3)$$

os vetores-linha da matriz $\mathbf{n}$ então as linhas da matriz-produto $\mathbf{mn}$ são

os vetores

$$\begin{aligned} X_1 &= a_1 \cdot u + b_1 \cdot v + c_1 \cdot w, \\ X_2 &= a_2 \cdot u + b_2 \cdot v + c_2 \cdot w, \\ X_3 &= a_3 \cdot u + b_3 \cdot v + c_3 \cdot w. \end{aligned}$$

Estabelecidas estas notações, podemos escrever

$$\begin{aligned} \det \mathbf{mn} &= \det[X_1, X_2, X_3] = \det[a_1 \cdot u + b_1 \cdot v + c_1 \cdot w, X_2, X_3] \\ &= a_1 \det[u, X_2, X_3] + b_1 \det[v, X_2, X_3] + c_1 \det[w, X_2, X_3]. \end{aligned}$$

Usando repetidamente as propriedades dos determinantes, vamos calcular cada uma das três parcelas acima. Em primeiro lugar, como $X_2 = a_2 \cdot u + b_2 \cdot v + c_2 \cdot w$, temos:

$$\det[u, X_2, X_3] = a_2 \det[u, u, X_3] + b_2 \det[u, v, X_3] + c_2 \det[u, w, X_3],$$

onde

$$\begin{aligned} \det[u, u, X_3] &= 0, \\ \det[u, v, X_3] &= a_3 \det[u, v, u] + b_3 \det[u, v, v] + c_3 \det[u, v, w] \\ &= c_3 \det[u, v, w] = c_3 \det \mathbf{n}, \\ \det[u, w, X_3] &= a_3 \det[u, w, u] + b_3 \det[u, w, v] + c_3 \det[u, w, w] \\ &= b_3 \det[u, w, v] = -b_3 \det[u, v, w] = -b_3 \det \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$a_1 \det[u, X_2, X_3] = (a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2) \det \mathbf{n}.$$

Analogamente se mostra que

$$b_1 \det[v, X_2, X_3] = (a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3) \det \mathbf{n}$$

e

$$c_1 \det[w, X_2, X_3] = (a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1) \det \mathbf{n}.$$

Concluímos então que

$$\begin{aligned} &\det \mathbf{mn} \\ &= (a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1) \cdot \det \mathbf{n}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\det \mathbf{mn} = \det \mathbf{m} \cdot \det \mathbf{n}.$$

Exercícios

1. Seja $\mathbf{p}$ uma matriz invertível 3×3. Prove que, para toda matriz $\mathbf{m}$ do tipo 3×3, tem-se $\det(\mathbf{p}^{-1}\mathbf{m}\mathbf{p}) = \det \mathbf{m}$.

2. Seja

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

O número $\mathrm{tr} \cdot \mathbf{m} = a_1 + b_2 + c_3$ (soma dos elementos da diagonal principal) chama-se o *traço* da matriz $\mathbf{m}$. Prove que $\mathrm{tr} \cdot \mathbf{mn} = \mathrm{tr} \cdot \mathbf{nm}$. Conclua que se $\mathbf{p}$ é invertível então $\mathrm{tr}(\mathbf{p}^{-1}\mathbf{m}\mathbf{p}) = \mathrm{tr} \cdot \mathbf{m}$.

3. Seja $\mathbf{m}$ uma matriz 3×3 cujas linhas u, v e w são, duas a duas, ortogonais. Calcule o produto $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^\top$ e, a partir daí, conclua que $\det \cdot \mathbf{m} = \pm |u||v||w|$.

4. Sejam $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$ matrizes do tipo 3×2 e 2×3 respectivamente. Forme as matrizes $\overline{\mathbf{m}}$ e $\overline{\mathbf{n}}$, ambas 3×3, acrescentando uma terceira coluna de zeros a $\mathbf{m}$ e uma terceira linha de zeros a $\mathbf{n}$. Mostre que $\mathbf{mn} = \overline{\mathbf{m}} \cdot \overline{\mathbf{n}}$. Conclua que $\det \mathbf{mn} = 0$.

5. Seja $M\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $M(x, y) = (a_1 x + b_1 y, a_2 x + b_2 y)$. Se a matriz $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ é não-nula e $\det \mathbf{m} = 0$, a imagem de M é uma reta passando pela origem. Se $\det \mathbf{m} \neq 0$, prove que M transforma todo triângulo OAB num triângulo $OA'B'$ tal que (área de $OA'B'$) $= |\det \mathbf{m}| \cdot$ (área de OAB). Prove que o mesmo fato vale para triângulos nos quais a origem não é um vértice.

38

Áreas, Volumes e a Matriz de Gram

Usaremos a fórmula $\det \mathbf{mn} = \det \mathbf{m} \cdot \det \mathbf{n}$ a fim de obter belas expressões para a área de um paralelogramo e para o volume de um paralelepípedo.

Sejam P, A, B três pontos não-colineares no espaço. Ponhamos $u = \overrightarrow{PA}$ e $v = \overrightarrow{PB}$. Considerando $u + v = \overrightarrow{PC}$ obtemos o paralelogramo $PACB$, no qual $A = P + u$, $B = P + v$ e $C = P + (u + v)$. A *matriz de Gram* dos vetores u, v é, por definição:

$$g(u, v) = \begin{bmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle \\ \langle v, u \rangle & \langle v, v \rangle \end{bmatrix}.$$

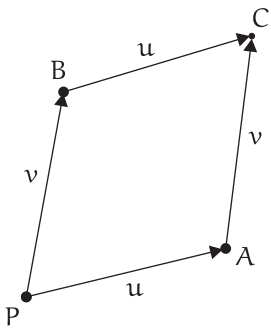


Figura 38.1 - Paralelogramo determinado pelo ponto P e pelos vetores u,v.

(É claro que $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.)

Mostraremos que $\det g(u,v)$ é o quadrado da área do paralelogramo PACB. Lembremos que o produto interno de dois vetores não depende do sistema de coordenadas. Consideremos então o sistema PXYZ, com origem no ponto P, tal que os pontos A e B pertençam ao plano horizontal $z = 0$. As coordenadas dos vetores u e v neste sistema são $u = (a_1, b_1, 0)$ e $v = (a_2, b_2, 0)$. Então

$$g(u,v) = \begin{bmatrix} a_1a_1 + b_1b_1 & a_1a_2 + b_1b_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 & a_2a_2 + b_2b_2 \end{bmatrix}.$$

Fica então claro que, pondo

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } \mathbf{m}^\top = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{m}\mathbf{m}^\top = g(u,v).$$

Lembrando que $\det \mathbf{m} = \det \mathbf{m}^\top$, podemos escrever:

$$\det g(u,v) = \det(\mathbf{m}\mathbf{m}^\top) = \det \mathbf{m} \cdot \det \mathbf{m}^\top = (\det \mathbf{m})^2.$$

Sabemos que o valor absoluto de $\frac{1}{2}\det \mathbf{m}$ é igual à área do triângulo PAB. Logo $|\det \mathbf{m}|$ é a área do paralelogramo PACB. Assim:

$$\begin{aligned} \det g(u,v) &= |u|^2|v|^2 - \langle u,v\rangle^2 \\ &= (\text{Área do paralelogramo PACB})^2. \end{aligned}$$

Mostraremos agora que uma expressão análoga vale para o volume de um paralelepípedo.

Com os vetores u, v, w do espaço, formamos as matrizes

$$g(u,v,w) = \begin{bmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle & \langle u,w\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle & \langle v,w\rangle \\ \langle w,u\rangle & \langle w,v\rangle & \langle w,w\rangle \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

$g(u,v,w)$ é a chamada *matriz de Gram* dos vetores dados. Evidentemente, ela não depende do sistema de eixos adotado. Já a matriz $\mathbf{m}$, cujas linhas são as coordenadas dos vetores $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = (a_2, b_2, c_2)$, $w = (a_3, b_3, c_3)$ em relação a um sistema OXYZ, varia conforme os eixos que se tomem. Mas se escrevermos explicitamente os elementos da matriz de Gram, veremos que

$$\begin{aligned} &g(u,v,w) \\ &= \begin{bmatrix} a_1a_1 + b_1b_1 + c_1c_1 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_2a_2 + b_2b_2 + c_2c_2 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 \\ a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 & a_3a_3 + b_3b_3 + c_3c_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

portanto $g(u, v, w) = \mathbf{m}\mathbf{m}^T$.

Segue-se daí que $\det g(u, v, w) = \det \mathbf{m} \cdot \det \mathbf{m}^T = (\det \mathbf{m})^2$.

Em particular, o determinante da matriz de Gram nunca é um número negativo. Ele é zero quando os vetores u, v, w são linearmente dependentes e positivo quando quando u, v, w são linearmente independentes.

A igualdade

$$\det g(u, v, w) = (\det \mathbf{m})^2$$

mostra ainda que o módulo do determinante da matriz $\mathbf{m}$ depende apenas dos vetores u, v, w mas não do sistema de eixos escolhido.

Esta observação nos permitirá obter a expressão que buscamos para o volume de um paralelepípedo.

Sejam P, A, B e C quatro pontos não-coplanares. Consideremos os vetores $u = \overrightarrow{PA}$, $v = \overrightarrow{PB}$ e $w = \overrightarrow{PC}$. Os pontos P, A, B e C determinam um paralelepípedo cujos outros quatro vértices são os pontos $D = P+(u+v)$, $P + (u + w)$, $P + (v + w)$ e $P + (u + v + w)$.

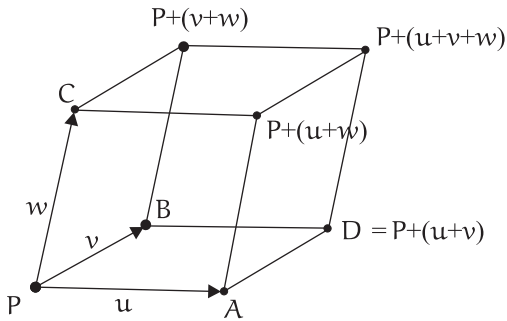


Figura 38.2 - Paralelepípedo S, determinado pelo ponto P e pelos vetores u,v,w.

Chamemos de S (sólido) esse paralelepípedo.

Sabemos que $\text{vol} \cdot S$ é o produto da área do paralelogramo $PADB$ pela altura de S relativa a esta base.

Tomemos no espaço um sistema de eixos $PXYZ$, com origem no ponto P, de tal modo que a base do paralelepípedo esteja contida no plano horizontal OXY.

Neste sistema, as coordenadas dos vetores $u = \overrightarrow{PA}$, $v = \overrightarrow{PB}$ e $w = \overrightarrow{PC}$ são respectivamente $u = (a_1, b_1, 0)$, $v = (a_2, b_2, 0)$ e $w = (a_3, b_3, c)$. Portanto $|c|$ é a altura do paralelepípedo S.

A matriz $\mathbf{m}$, que tem esses vetores como linhas, assume o aspecto abaixo:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c \end{bmatrix};$$

logo

$$\det \mathbf{m} = c \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Ora, conforme vimos acima, a área do paralelogramo PADB, base de S, é igual ao valor absoluto do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Segue-se que

$$|\det \mathbf{m}| = |c| \cdot (\text{área do paralelogramo PADB}) = \text{vol} \cdot S.$$

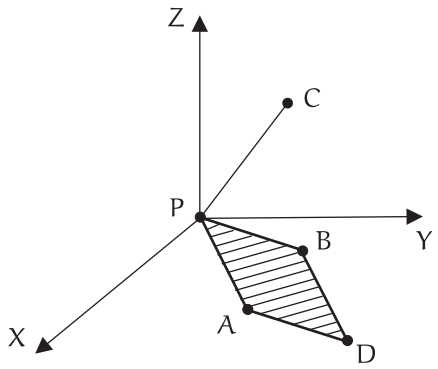


Figura 38.3 - No sistema PXYZ, a base PADB do paralelepípedo está contida no plano $z = 0$.

Como $\det \mathbf{m}$ depende apenas dos vetores u, v, w mas não do sistema de eixos escolhido, podemos então afirmar que, se $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = (a_2, b_2, c_2)$ e $w = (a_3, b_3, c_3)$ são as coordenadas dos vetores $u = \overrightarrow{PA}$, $v = \overrightarrow{PB}$ e $w = \overrightarrow{PC}$ em relação a qualquer sistema de eixos ortogonais tomados no espaço, então o volume do paralelepípedo construído a partir

dos quatro pontos não-colineares P, A, B e C é igual ao valor absoluto do determinante da matriz

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, é bem conhecido que o volume do tetraedro $PABC$ é igual a $1/6$ do volume do paralelepípedo S, logo $\text{vol}(PABC) = \frac{1}{6}|\det \mathbf{m}|$, onde $\mathbf{m}$ é matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores $u = \overrightarrow{PA}$, $v = \overrightarrow{PB}$ e $w = \overrightarrow{PC}$.

Vemos ainda que $\det g(u, v, w) = (\text{vol}\, S)^2 = 36 \cdot [\text{vol}(PABC)]^2$.

Exemplo 38.1 Sejam $A = (1, -1, 2)$, $B = (-2, 1, 3)$ e $C = (2, -1, 1)$ três pontos do espaço. Para calcular a área do paralelogramo que tem os segmentos AB e AC como lados, tomamos os vetores $u = \overrightarrow{AB} = (-3, 2, 1)$, $v = \overrightarrow{AC} = (1, 0, -1)$ e com eles formamos a matriz de Gram

$$g(u, v) = \begin{bmatrix} \langle u, u\rangle & \langle u, v\rangle \\ \langle u, v\rangle & \langle v, v\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},$$

cujo determinante, igual a 12, é o quadrado da área do paralelogramo $ABDC$. Portanto, a área de $ABDC$ é igual a $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Exemplo 38.2 Mantendo a notação do exemplo anterior, acrescentemo-lhe o ponto $D = (4, 2, 1)$. Pondo $w = \overrightarrow{AD} = (3, 3, -1)$, obtemos a matriz de Gram

$$g(u, v, w) = \begin{bmatrix} \langle u, u\rangle & \langle u, v\rangle & \langle u, w\rangle \\ \langle u, v\rangle & \langle v, v\rangle & \langle v, w\rangle \\ \langle u, w\rangle & \langle v, w\rangle & \langle w, w\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & 4 \\ -4 & 4 & 19 \end{bmatrix},$$

cujo determinante é igual a 100. Concluímos então que o volume do paralelepípedo que tem os segmentos AB, AC e AD como arestas é igual a 10.

Observação 38.1 Resulta da fórmula $\text{vol}\, S = |\det \mathbf{m}|$ que o volume de um paralelepípedo cujos vértices têm coordenadas inteiras é um número inteiro. Como o determinante da matriz de Gram é o quadrado desse volume, concluímos então que se os vetores u, v, w têm coordenadas inteiras, então o determinante da matriz de Gram $g(u, v, w)$ é um quadrado

perfeito. No Exemplo 2 acima, esse determinante é 100. O mesmo resultado se aplica à matriz de Gram $g(u, v)$ quando u e v são vetores do plano com coordenadas inteiras, mas não é verdade quando u e v são vetores do espaço, como mostra o Exemplo 38.1.

Exercícios

1. Mostre que o argumento usado no texto para calcular a área de um paralelepípedo pode ser empregado para obter a área de um paralelogramo, diretamente, sem usar o resultado da Seção 10.

2. Use a interpretação do determinante como volume de um paralelepípedo para provar que se u, v e w são as linhas da matriz $\mathbf{m}$ então $|\det \cdot \mathbf{m}| \leq |u||v||w|$ (desigualdade de Hadamard).

3. Para quaisquer números reais a, b, c, m, n, p, mostre que se tem

$$\det \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2 & am+bn+cp \\ am+bn+cp & m^2+n^2+p^2 \end{bmatrix}^2 \geq \det \begin{bmatrix} a^2+b^2 & am+bn \\ am+bn & m^2+n^2 \end{bmatrix}^2.$$

4. Seja $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz $\mathbf{m}$ tem determinante $\neq 0$. Prove que M transforma todo tetraedro $OABC$ num tetraedro $OA'B'C'$ tal que $\mathrm{vol}(OA'B'C') = |\det \mathbf{m}| \cdot \mathrm{vol}(OABC)$.

5. Sejam OA, OB e OC segmentos de reta perpendiculares dois a dois. Use a matriz de Gram para mostrar que

$$(\text{área } OAB)^2 + (\text{área } OBC)^2 + (\text{área } OAC)^2 = (\text{área } ABC)^2.$$

6. Um bloco retangular tem arestas com medidas $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 4$ e $\overline{AD} = 5$. Determine a área do triângulo BCD.

39

Caracterização das Matrizes Invertíveis

A maneira mais popularizada de caracterizar a invertibilidade de uma matriz é por meio do seu determinante, conforme o

Teorema. *A matriz quadrada* $\mathbf{m}$ *é invertível se, e somente se,* $\det \mathbf{m} \neq 0$.

A metade da demonstração (ou a demonstração da metade) deste fato consiste no uso imediato da fórmula $\det(\mathbf{mn}) = \det \mathbf{m} \cdot \det \mathbf{n}$. Com efeito, se a matriz $\mathbf{m}$ possui a inversa $\mathbf{m}^{-1}$, da igualdade $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^{-1} = \mathbf{I_3}$ se conclui que $\det \mathbf{m} \cdot \det(\mathbf{m}^{-1}) = 1$, logo $\det \mathbf{m} \neq 0$ e, mais ainda, $\det \mathbf{m}^{-1} = 1/\det \mathbf{m}$.

Suponhamos agora que, reciprocamente, se tenha $\det \mathbf{m} \neq 0$. Procuremos uma matriz $\mathbf{p}$ tal que $\mathbf{mp} = \mathbf{I_3}$. Escrevamos

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{I_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A equação matricial $\mathbf{mp} = \mathbf{I_3}$ significa que os vetores-coluna da matriz procurada $\mathbf{p}$ são soluções (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) e (z_1, z_2, z_3) dos sistemas abaixo:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= 1 \qquad & a_1y_1 + b_1y_2 + c_1y_3 &= 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= 0 \qquad & a_2y_1 + b_2y_2 + c_2y_3 &= 1 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 &= 0 \qquad & a_3y_1 + b_3y_2 + c_3y_3 &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_1z_1 + b_1z_2 + c_1z_3 &= 0 \\ a_2z_1 + b_2z_2 + c_2z_3 &= 0 \\ a_3z_1 + b_3z_2 + c_3z_3 &= 1 \end{aligned}$$

Como $\det \mathbf{m} \neq 0$, segue-se da Seção 35 que as linhas da matriz $\mathbf{m}$ são linearmente independentes. Como vimos na Seção 32 (oitavo caso), isto significa que cada um dos sistemas acima admite uma única solução. Noutras palavras, existe uma única matriz $\mathbf{p}$, do tipo 3×3, tal que $\mathbf{mp} = \mathbf{I_3}$.

Num argumento inteiramente análogo, têm-se 3 sistemas com a matriz $\mathbf{m}^\top$ (cujo determinante é o mesmo de $\mathbf{m}$). As soluções desses 3 sistemas são as linhas de uma matriz $\mathbf{q}$, do tipo 3×3, tal que $\mathbf{qm} = \mathbf{I_3}$. Mas é claro que

$$\mathbf{q} = \mathbf{qI_3} = \mathbf{q(mp)} = \mathbf{(qm)p} = \mathbf{I_3p} = \mathbf{p}.$$

Logo $\mathbf{pm} = \mathbf{mp} = \mathbf{I_3}$, isto é, $\mathbf{p} = \mathbf{m}^{-1}$ é a matriz inversa de $\mathbf{m}$. Assim, $\det \mathbf{m} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{m}$ invertível.

Vemos portanto que as seguintes afirmações a respeito de uma matriz $\mathbf{m}$ do tipo 3×3 são equivalentes:

1. As linhas de $\mathbf{m}$ são linearmente independentes;
2. Todo sistema de equações lineares $\mathbf{mx} = \mathbf{d}$ tem solução única, seja qual for a matriz $\mathbf{d}$, do tipo 3×1;
3. $\det \mathbf{m} = \det \mathbf{m}^\top \neq 0$;
4. As colunas de $\mathbf{m}$ são linearmente independentes;
5. Existe uma única matriz $\mathbf{m}^{-1}$ tal que $\mathbf{m}^{-1}\mathbf{m} = \mathbf{m}\mathbf{m}^{-1} = \mathbf{I_3}$ ($\mathbf{m}$ é invertível).

Observação 39.1 A restrição a matrizes 3×3 é meramente uma conveniência didática. Todos os resultados deste capítulo continuam válidos, com as mesmas demonstrações, para matrizes $n \times n$ em geral.

Observação 39.2 Se as linhas da matriz $\mathbf{m}$ são linearmente independentes então, ao aplicar o processo de escalonamento, nunca se chega a uma linha $\ell = 0$. Logo o sistema $\mathbf{mx} = \mathbf{d}$ tem uma única solução, seja qual for $\mathbf{d}$. Este argumento mostra como provar o teorema acima utilizando os resultados da Seção 33 e não os da Seção 32.

Exercícios

1. Seja $\mathbf{m}$ uma matriz quadrada $n \times n$. Chama-se *traço* de $\mathbf{m}$ a soma $\operatorname{Tr}\cdot\mathbf{m} = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ dos elementos a_{ii} da sua diagonal. Prove que $\operatorname{Tr}\cdot(\mathbf{m}+\mathbf{n}) = \operatorname{Tr}\cdot\mathbf{m} + \operatorname{Tr}\cdot\mathbf{n}$, $\operatorname{Tr}\cdot\alpha\mathbf{m} = \alpha\operatorname{Tr}\cdot\mathbf{m}$ se $\alpha \in \mathbb{R}$ e que $\operatorname{Tr}\cdot(\mathbf{mn}) = \operatorname{Tr}\cdot(\mathbf{nm})$.

2. Dadas as matrizes

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix},$$

defina as funções $M, N\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (transformações lineares) pondo, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $M(x, y) = (a_1x+b_1y, a_2x+b_2y)$, $N(x, y) = (c_1x+d_1y, c_2x+d_2y)$. Prove que a composta $M \circ N\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem a forma $(M \circ N)(x, y) = (r_1x + s_1y, r_2x + s_2y)$, onde

$$\begin{bmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{bmatrix} = \mathbf{mn}.$$

Enuncie e prove um resultado análogo para matrizes 3×3. Generalize.

3. Sejam $\mathbf{m}$ e $\mathbf{p}$ matrizes 3×3, com $\mathbf{p}$ invertível. Prove que $\mathbf{m}$ e $\mathbf{p}^{-1}\mathbf{mp}$ têm o mesmo traço.

4. No Exercício 2, mostre que se $\det \mathbf{m} \neq 0$ então a função M transforma todo paralelogramo P (ou paralelepípedo, conforme se considere $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) noutro paralelogramo (ou paralelepípedo) P' tal que área de P' = (área de P) $\times |\det \mathbf{m}|$, (ou $\operatorname{vol} P' = \operatorname{vol} P \cdot |\det \mathbf{m}|$).

5. Enuncie e demonstre o análogo para $\mathbb{R}^3$ do exercício 3 da Seção 35. Conclua que todas as propriedades do determinante são conseqüências destas quatro.

6. Seja

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

tal que $\Delta = \det \mathbf{m} \neq 0$. Resolva os sistemas de equações lineares

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 &= 1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} a_1y_1 + b_1y_2 &= 0 \\ a_2y_1 + b_2y_2 &= 1 \end{aligned}$$

e obtenha uma fórmula explícita para a matriz inversa

$$\mathbf{m}^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}.$$

7. Partindo da matriz

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix},$$

e supondo $\Delta = \det \mathbf{m} \neq 0$, use três vezes a regra de Cramer para mostrar que

$$\mathbf{m}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix},$$

onde $M_i = (-1)^{i+1}A_i$, $N_i = (-1)^i B_i$ e $P_i = (-1)^{i+1}C_i$ $(i = 1,2,3)$. [Conforme a notação estabelecida na Seção 35, os números A_i, B_i e C_i são os menores relativos a a_i, b_i e c_i respectivamente.] A matriz $\Delta \cdot \mathbf{m}^{-1}$ chama-se a *adjunta clássica* de $\mathbf{m}$.

8. Escreva um sistema de 3 equações lineares com 3 incógnitas. Resolva-o por eliminação, pela regra de Cramer e pela fórmula $\mathbf{x} = \mathbf{m}^{-1} \cdot \mathbf{d}$. Compare e comprove qual dos três métodos é o mais eficiente.

9. Uma matriz quadrada $\mathbf{m}$ chama-se quando $\mathbf{m}^\top = \mathbf{m}^{-1}$. Prove que $\mathbf{m}$ é ortogonal se, e somente se, seus vetores-linha (ou coluna) são dois a dois ortogonais de comprimento 1. Dê exemplos de matrizes ortogonais 2×2 e 3×3 nas quais nenhum elemento é igual a zero. (Veja Exemplo 34.4).

10. Seja $\mathbf{m}$ uma matriz 3×3 ou 3×4. Diz-se que $\mathbf{m}$ tem 1 quando uma de suas linhas é não-nula e as outras são múltiplos dela. Prove que, neste caso, uma de suas colunas é não-nula e as outras colunas são múltiplos dela.

11. Prove que uma matriz não-nula $\mathbf{m}$, do tipo 3×3, tem posto 1 se, e somente se, existem números a_1, a_2, a_3 e b_1, b_2, b_3 tais que

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}.$$

Enuncie e demonstre um fato análogo para matrizes 3×4.

12. Seja $\mathbf{m}$ uma matriz 3×3. Diz-se que $\mathbf{m}$ tem *posto* 2 quando duas de suas linhas são linearmente independentes e a outra é combinação linear delas. Prove que se $\mathbf{m}$ tem posto 2 então duas de suas colunas são linearmente independentes e a outra coluna é combinação linear delas. Enuncie e demonstre um resultado análogo para matrizes 3×4.

13. Diz-se que uma matriz 3×3 tem *posto* 3 quando suas linhas são linearmente independentes. Prove que se $\mathbf{m}$ tem posto 3 então suas três colunas são linearmente independentes.

14. Diz-se que uma matriz 3×4 tem *posto* 3 quando suas linhas são linearmente independentes. Prove que, neste caso, três de suas colunas são linearmente independentes e a quarta é necessariamente uma combinação linear delas.

15. Prove o Teorema de Rouché: um sistema de 3 equações lineares com três incógnitas tem solução se, e somente se, o posto da matriz do sistema é igual ao posto da matriz aumentada. [Note que o posto de uma matriz não-nula é o número máximo de linhas - ou colunas - linearmente independentes dessa matriz.]

16. Seja $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Resolva dois sistemas 2×2 para obter uma matriz $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ tal que $\mathbf{mp} = \mathbf{I}_2$.

17. Sejam $\mathbf{m}$ e $\mathbf{p}$ matrizes 3×3. Se uma das linhas de $\mathbf{m}$ é múltiplo de outra, prove que o mesmo ocorre com a matriz produto $\mathbf{mp}$. Conclua que $\mathbf{m}$ não possui uma matriz inversa.

18. Torne mais abrangente o resultado acima: mostre que se alguma linha de $\mathbf{m}$ é combinação linear das outras duas então o mesmo ocorre com $\mathbf{mp}$, seja qual for $\mathbf{p}$. Conclua que, nestas condições, $\mathbf{m}$ não é invertível.

19. Determine quais das matrizes abaixo têm uma linha que é combinação linear das outras duas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

20. Calcule a área da superfície de um prisma reto cuja base é um paralelogramo $ABCD$, com $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 8$, $\overline{BC} = 10$ e três das arestas verticais têm medidas $\overline{AA'} = 2$, $\overline{BB'} = 5$ e $\overline{CC'} = 7$.

21. Dado um triângulo acutângulo ABC, mostre que existe um ponto O no espaço, tal que os ângulos $A\hat{O}B$, $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ são retos. Determine as medidas das arestas e da altura da pirâmide de base ABC e vértice O em função dos lados a, b, c do triângulo ABC.

22. Uma transformação linear $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ chama-se *invertível* quando existe uma transformação linear $N\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (dita a *inversa* de M) tal que $M(N(x)) = N(M(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Mostre que M é invertível se, e somente se, sua matriz $\mathbf{m}$ é invertível. No caso afirmativo, a matriz de N é $\mathbf{m}^{-1}$.

23. Prove que uma matriz $\mathbf{m}$, do tipo 3×3 é invertível se, e somente se, para toda matriz não-nula $\mathbf{x}$, com três linhas e uma só coluna, tem-se $\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} \neq 0$.

24. Seja $\mathbf{m}$ uma matriz 3×3. Se o sistema linear homogêneo $\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} = 0$ admite uma única solução $x = (0, 0, 0)$ prove que para todo $d = (d_1, d_2, d_3)$, o sistema linear $\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}$ admite uma única solução. (Aqui, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$.)

40

O Produto Vetorial

Ao contrário do produto interno, que dá como resultado um número e tem sentido tanto no plano como no espaço, o produto vetorial é um modo de combinar dois vetores do espaço dando como resultado um outro vetor. Essa operação tem um significado geométrico interessante, que será mostrado a seguir, mas será definida algebricamente, a fim de facilitar a dedução de suas propriedades formais.

Fixado um sistema de eixos ortogonais OXYZ no espaço, consideremos os vetores $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2)$, dados por suas coordenadas relativas a esses eixos.

Suponhamos u e v linearmente independentes. A definição de produto vetorial que daremos a seguir provém do problema de encontrar um vetor não-nulo $w = (x, y, z)$ que seja ortogonal a u e a v. Então devemos ter simultaneamente

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0 \quad \text{e}$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0.$$

Como u e v são linearmente independentes podemos admitir, sem perda de generalidade, que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Escrevamos as equações acima sob a forma

$$a_1x + b_1y = -c_1z$$
$$a_2x + b_2y = -c_2z.$$

Resolvendo este sistema nas incógnitas x e y achamos

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}z \quad \text{e} \quad y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}z.$$

Uma escolha natural para z é $z = a_1b_2 - a_2b_1$. Temos então

$$w = (b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Isto motiva a definição seguinte.

O *produto vetorial* de $u = (a_1, b_1, c_1)$ por $v = (a_2, b_2, c_2)$ é o vetor

$$u \times v = (b_1c_2 - b_2c_1, -(a_1c_2 - a_2c_1), a_1b_2 - a_2b_1).$$

(O sinal menos da segunda coordenada, que destacamos para evitar erro, faz com que valha a propriedade 4. abaixo.) Sejam e_1, e_2, e_3 os vetores unitários dos eixos.

Reconhece-se imediatamente que

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot e_1 - \det \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot e_2 + \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot e_3.$$

Isto sugere interpretar mnemonicamente o produto vetorial $u \times v$ como o "determinante" abaixo, expandido segundo os elementos da primeira linha:

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Observe o carater híbrido da matriz acima. Sua primeira linha é formada por vetores e as outras duas por números.

As seguintes propriedades do produto vetorial decorrem diretamente da definição:

1. $u \times v = -(v \times u)$.

Com efeito, os determinantes mudam de sinal quando se trocam as posições de duas de suas linhas.

2. $(u + u') \times v = u \times v + u' \times v$ e $u \times (v + v') = u \times v + u \times v'$.

Conseqüência da propriedade análoga para determinantes.

3. $(\alpha \cdot u) \times v = u \times (\alpha \cdot v) = \alpha \cdot (u \times v)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Idem.

4. *Para qualquer vetor* w, tem-se $\langle u \times v, w \rangle = \det[u, v, w]$.

Com efeito, desenvolvendo em relação à terceira linha o determinante $\det[u, v, w]$, onde $w = (a_3, b_3, c_3)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \det[u, v, w] &= (b_1c_2 - b_2c_1)a_3 - (a_1c_2 - a_2c_1)b_3 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 \\ &= \langle u \times v, w \rangle. \end{aligned}$$

5. $u \times v$ *é um vetor ortogonal a* u *e a* v.

Com efeito, segue-se de 4. que

$$\langle u \times v, u \rangle = \det[u, v, u] = 0 \text{ e } \langle u \times v, v \rangle = \det[u, v, v] = 0.$$

6. $u \times v = 0$ *se, e somente se, os vetores* u *e* v *são colineares*.

Com efeito, u e v são colineares se, e somente se, $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = b_1c_2 - b_2c_1 = 0$.

7. *O triedro* $\{u, v, u \times v\}$ *é positivamente orientado*.

Aqui, estamos supondo que u e v não são colineares. Um triedro $\{u, v, w\}$ diz-se *positivamente orientado* (em relação ao sistema de eixos fixado) quando é positivo o determinante cujas linhas são formadas pelas coordenadas dos vetores dados, na ordem em que são listados.

Ora, tomando $w = u \times v$ na propriedade 4., tem-se

$$\det[u, v, u \times v] = \langle u \times v, u \times v \rangle = |u \times v|^2 > 0.$$

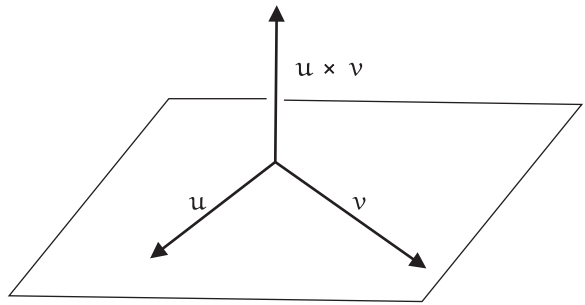


Figura 40.1 - O produto vetorial $u \times v$ é ortogonal ao plano de u e v.

8. $|u \times v| =$ *área* $[u, v]$ $(=$ *área do paralelogramo de lados* u *e* $v)$.

Com efeito, lembrando que o volume de um paralelepípedo é o produto da sua altura pela área da base e observando que o paralelepípedo construído sobre os vetores $u, v, u \times v$ tem altura $|u \times v|$ e base igual a área $[u, v]$, a propriedade 4. fornece:

$$\begin{aligned} |u \times v|^2 &= \langle u \times v, u \times v \rangle = \det[u, v, u \times v] \\ &= \text{vol}[u, v, u \times v] = |u \times v| \cdot \text{ área}[u, v]. \end{aligned}$$

Se u e v são colineares então $|u \times v| = \text{área}[u, v] = 0$. Caso contrário, podemos dividir por $|u \times v|$ e obter $|u \times v| = \text{área}[u, v]$.

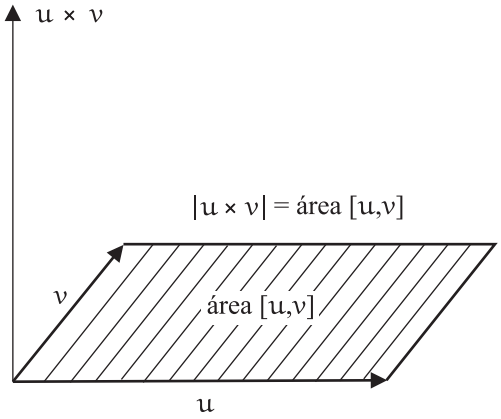


Figura 40.2 - O comprimento de $u \times v$ é igual à área do paralelogramo $[u,v]$.

Escrevendo o quadrado da área do paralelogramo $[u, v]$ como o determinante da matriz de Gram, a igualdade

$$|u \times v|^2 = (\text{área}[u, v])^2$$

significa:

$$\begin{aligned}(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)^2 + (b_1c_2 - b_2c_1)^2 \\ = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2.\end{aligned}$$

A igualdade acima é conhecida como a *identidade de Lagrange*. Olhada geometricamente, ela constitui uma interessante e útil generalização do Teorema de Pitágoras.

Com efeito, ela diz que o quadrado da área de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das suas três projeções sobre os planos coordenados Π_{xy}, Π_{xz} e Π_{yz}.

Para ver isto, basta lembrar que as projeções dos vetores u, v sobre o plano Π_{xy} são os vetores

$$u_0 = (a_1, b_1, 0) \quad \text{e} \quad v_0 = (a_2, b_2, 0).$$

Portanto a projeção do paralelogramo $[u, v]$ sobre o plano Π_{xy} é o paralelogramo $[u_0, v_0]$, cuja área é $|a_1b_2 - a_2b_1|$. O mesmo se dá com as projeções de $[u, v]$ nos demais planos Π_{xz} e Π_{yz}.

As propriedades **5.**, **6.**, **7.** e **8.** caracterizam inteiramente o produto vetorial $u \times v$. Com efeito, **6.** diz que $u \times v = 0$ quando u e v são

colineares. Caso contrário, **5.** diz que $u \times v$ se situa sobre a reta perpendicular ao plano de u e v, **7.** diz para que lado dessa reta $u \times v$ aponta e **8.** diz qual o comprimento de $u \times v$.

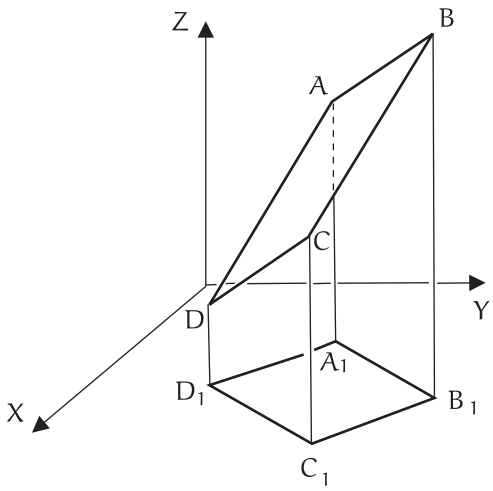


Figura 40.3 - $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$ é a projeção ortogonal do paralelogramo $ABCD$ sobre o plano OXY.

Noutras palavras, poderíamos ter definido o produto vetorial $u \times v$ como o vetor perpendicular a u e v, de comprimento igual à área$[u, v]$ e dotado do sentido que torna positivo o triedro $\{u, v, u \times v\}$. Complementaríamos a definição pondo $u \times v = 0$ quando u e v fossem colineares.

Esta definição geométrica constitui a maneira mais adequada de se pensar no produto vetorial. Ela mostra também que o produto vetorial, embora tenha sido apresentado por meio de coordenadas, não depende do sistema de eixos ortogonais utilizado. Quer dizer: não depende até certo ponto. Expliquemos.

Se substituirmos o sistema $OXYZ$ por outro $O'X'Y'Z'$, em relação ao qual passamos a tomar as coordenadas, o produto vetorial $u \times v$ continua o mesmo, *desde que estes dois sistemas tenham a mesma orientação*, isto é, que os triedros positivos num deles sejam também positivos no outro. Esta condição (de igual orientação) pode ser verificada assim: toma-se o determinante cujas linhas são as coordenadas (no sistema $OXYZ$) dos vetores unitários do sistema $O'X'Y'Z'$. Os dois sistemas são igualmente orientados se, e somente se, este determinante é positivo.

Caso os dois sistemas tenham orientações contrárias, o produto vetorial muda de sinal.

O produto vetorial é útil em problemas onde se quer uma reta perpendicular a dois vetores dados. Veremos, a seguir, duas situações desse tipo.

Suponhamos que se procure a equação $ax + by + cz = d$ do plano Π que passa por três pontos não-colineares

$$A = (x_0, y_0, z_0),\ B = (x_1, y_1, z_1) \text{ e } C = (x_2, y_2, z_2).$$

Sabemos que o vetor $w = (a, b, c)$ deve ser perpendicular ao plano Π, ou seja, aos vetores

$$u = \overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \text{ e}$$
$$v = \overrightarrow{AC} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0) = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2).$$

Tomamos então $w = (a, b, c) = u \times v$, isto é:

$$a = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1,\ b = \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2 \text{ e } c = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

O plano Π é definido pela equação

$$ax + by + cz = d.$$

Como os pontos A, B e C estão sobre o plano, tem-se:

$$d = ax_0 + by_0 + cz_0 = ax_1 + by_1 + cz_1 = ax_2 + by_2 + cz_2.$$

Exemplo 40.1 Determinar a equação do plano que passa pelos pontos $A = (1, -1, 2)$, $B = (1, 2, 3)$ e $C = (3, 1, 2)$. Temos

$$u = \overrightarrow{AB} = (0, 3, 1) \text{ e } v = \overrightarrow{AC} = (2, 2, 0),$$

logo $u \times v = (-2, 2, -6)$. A equação procurada tem a forma $-2x + 2y - 6z = d$, onde

$$d = -2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 6 \cdot 2 = -16.$$

Outro problema em que se faz uso do produto vetorial é o de determinar a perpendicular comum a (e a distância entre) duas retas reversas.

Sejam as retas R, que passa pelos pontos A, A', e S, que passa pelos pontos B, B'. Pondo $u = \overrightarrow{AA'}$ e $v = \overrightarrow{BB'}$ tem-se

$$R = \{A + r \cdot u;\ r \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad S = \{B + s \cdot v;\ s \in \mathbb{R}\}.$$

Dizer que essas retas são reversas significa afirmar que elas não têm ponto em comum e, além disso, os vetores u e v não são colineares.

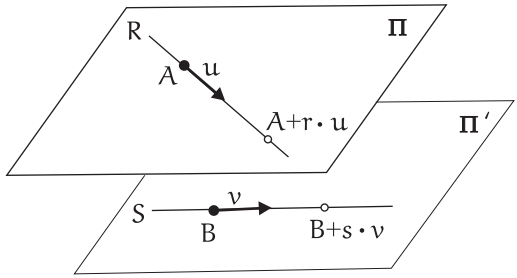


Figura 40.4 - Os planos paralelos Π e Π' que contêm as retas reversas R e S.

Seja $w = u \times v$. Qualquer reta paralela a w, isto é, do tipo $T = \{C + t \cdot w;\ t \in \mathbb{R}\}$, é ortogonal tanto a R como a S. Queremos que a reta T tenha origem num ponto $C = A + r \cdot u$ pertencente a R e, além disso, que passe por algum ponto $B + s \cdot v$ da reta S.

Devemos portanto tomar $w = u \times v$ e, em seguida, determinar os números reais r, s, t tais que

$$A + r \cdot u + t \cdot w = B + s \cdot v,$$

ou seja,

$$r \cdot u - s \cdot v + t \cdot w = \overrightarrow{AB}.$$

Esta equação vetorial equivale a um sistema de três equações numéricas, cuja solução (r_0, s_0, t_0) fornece os números procurados. A equação paramétrica da reta T é então

$$T = \{A + r_0 \cdot u + t \cdot w;\ t \in \mathbb{R}\}.$$

A distância entre as retas R e S, ou seja, a menor distância entre um ponto qualquer de R e um ponto qualquer de S, é o comprimento do segmento de reta que liga os pontos $A+r_0 \cdot u$ e $B+s_0 \cdot v$. Este comprimento é igual a $|t_0 \cdot w|$, pois $A + r_0 \cdot u + t_0 \cdot w = B + s_0 \cdot v$.

Exemplo 40.2 Achar a perpendicular comum às retas reversas $R = AA'$ e $S = BB'$ e determinar a distância entre essas retas, conhecendo-se as coordenadas

$$A = (2, -3, 1),\ A' = (4, 2, -3),\ B = (1, 4, 2),\ B' = (3, 5, 6).$$

Temos $u = \overrightarrow{AA'} = (2,5,-4)$, $v = \overrightarrow{BB'} = (2,1,4)$, portanto $w = u \times v = (24,-16,-8)$ e $\overrightarrow{AB} = (-1,7,1)$. O sistema linear $r \cdot u - s \cdot v + t \cdot w = \overrightarrow{AB}$ escreve-se então como

$$\begin{aligned} 2r - 2s + 24t &= -1 \\ 5r - s - 16t &= 7 \\ -4r - 4s - 8t &= 1. \end{aligned}$$

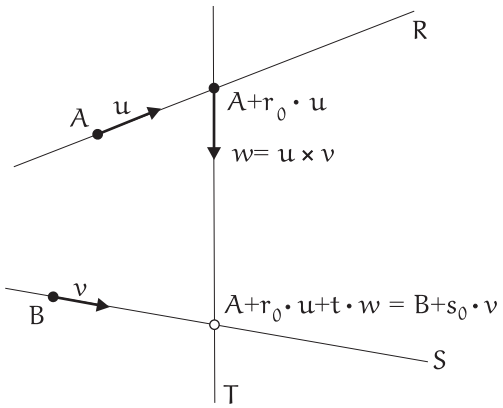


Figura 40.5 - A reta T, perpendicular comum às retas reversas R e S.

Resolvendo-o, obtemos $r_0 = 3/4$, $s_0 = -19/28$ e $t_0 = -9/56$.

Portanto, a perpendicular comum às retas AA' e BB' é a reta que passa pelo ponto $C = A + r_0 \cdot u = (7/2, 3/4, -2)$ e é paralela ao vetor $w = (24,-16,-8)$. A distância entre as retas AA' e BB' é igual a $|t_0 \cdot w| = \frac{9}{56} \cdot \sqrt{896} = 4,81$.

Observação 40.1 No problema de achar a distância entre duas retas reversas, a equação vetorial $r \cdot u - s \cdot v + t \cdot w = \overrightarrow{AB}$ (e o sistema linear que lhe é equivalente) possui sempre uma solução (única) (r_0, s_0, t_0) porque, sendo os vetores u, v, w linearmente independentes, todo vetor $\overrightarrow{AB}$ do espaço se escreve, de maneira única, como combinação linear de u, v e w.

Exercícios

1. Seja $\mathbf{m}$ uma matriz 2×3. Indicando com $\mathbf{m_1}, \mathbf{m_2}$ e $\mathbf{m_3}$ respectivamente as matrizes 2×2 obtidas de $\mathbf{m}$ quando se omitem a primeira, a segunda e a terceira coluna, mostre que $\det \cdot \mathbf{m}\mathbf{m}^\top = (\det \cdot \mathbf{m_1})^2 + (\det \cdot \mathbf{m_2})^2 + (\det \cdot \mathbf{m_3})^2$.

2. Para quaisquer vetores u, v, w, prove que $\langle u \times v, w\rangle = \langle u, v \times w\rangle$.

3. Escreva sob a forma $ax + by + cz = d$ a equação do plano que passa pelo ponto $A = (-7, 2, 5)$ e é paralelo aos vetores $u = (3, 2, 4)$ e $v = (1, 0, 4)$.

4. Use o produto vetorial para obter as coordenadas do pé da perpendicular baixada do ponto $P = (1, 2, 3)$ sobre o plano que contém os pontos $A = (5, 6, 0)$, $B = (0, 2, 2)$ e $C = (1, 0, 4)$.

5. No espaço quadridimensional $\mathbb{R}^4$, defina o produto interno $\langle u, v\rangle$ dos vetores $u = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2, d_2)$. Defina vetores ortogonais. Imitando o caso de $\mathbb{R}^3$, defina o produto vetorial $u \times v \times w$ de modo que seja ortogonal a cada um dos vetores u, v e w. Embora não exista em $\mathbb{R}^4$ a noção de produto vetorial de dois vetores, enuncie e prove propriedades de $u \times v \times w$ análogas àquelas provadas no texto para o produto vetorial de dois vetores de $\mathbb{R}^2$.

6. Escolhendo um sistema de eixos conveniente no espaço, mostre que, para quaisquer vetores u, v, w e t, vale

$$\det \cdot \begin{bmatrix} \langle u, w\rangle & \langle u, t\rangle \\ \langle v, w\rangle & \langle v, t\rangle \end{bmatrix} = \langle u \times v, w \times t\rangle.$$

7. Mostre que $u \times (v \times w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w$. (Sugestão: Os dois membros desta proposta igualdade são funções $\varphi(u, v, w)$ e $\psi(u, v, w)$, de três variáveis vetoriais, lineares em relação a cada uma delas, tais que $\varphi(e_1, e_j, e_k) = \psi(e_i, e_j, e_k)$ para quaisquer i, j, k de 1 a 3.)

8. Prove que $(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = 0$.

41

Mudança de Coordenadas

Em certos problemas, é conveniente passar de um sistema de eixos $OXYZ$, já adotado, para um novo sistema $O'X'Y'Z'$, melhor adaptado às circunstâncias. Essas mudanças de eixos serão abundantemente consideradas nas seções seguintes. Surge então, naturalmente, a questão de, conhecendo as coordenadas x, y, z de um ponto P no sistema $OXYZ$, obter as coordenadas x', y', z' do mesmo ponto no novo sistema $O'X'Y'Z'$.

Nesta seção, trataremos desse problema. Um papel relevante na discussão será desempenhado pelos vetores unitários e_1, e_2, e_3 dos eixos OX, OY, OZ, juntamente com os vetores unitários f_1, f_2, f_3 dos eixos $O'X', O'Y'$ e $O'Z'$.

Todo vetor do espaço sendo combinação linear de e_1, e_2 e e_3, podemos escrever, para $f_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $f_2 = (a_2, b_2, c_2)$ e $f_3 = (a_3, b_3, c_3)$:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 \cdot e_1 + b_1 \cdot e_2 + c_1 \cdot e_3 \\ f_2 &= a_2 \cdot e_1 + b_2 \cdot e_2 + c_2 \cdot e_3 \\ f_3 &= a_3 \cdot e_1 + b_3 \cdot e_2 + c_3 \cdot e_3. \end{aligned} \qquad (*)$$

Como os vetores unitários e_1, e_2, e_3 são perpendiculares uns aos outros, para cada $i = 1, 2, 3$ temos $\langle f_i, e_1\rangle = a_i$, $\langle f_i, e_2\rangle = b_i$ e $\langle f_i, e_3\rangle = c_i$.

Segue-se da fórmula $\langle u, v\rangle = |u||v| \cos\theta$, que $a_i = \cos\alpha_i$, $b_i = \cos\beta_i$, $c_i = \cos\gamma_i$ onde, para cada $i = 1, 2, 3$, α_i, β_i e γ_i são os ângulos que o vetor f_i forma com os eixos OX, OY e OZ. Como cada vetor f_i é unitário, tem-se $\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i = 1$.

Reciprocamente, cada vetor e_j $(j = 1, 2, 3)$ se escreve como combinação linear dos vetores unitários f_1, f_2, f_3. Por exemplo, podemos

escrever $e_1 = x \cdot f_1 + y \cdot f_2 + z \cdot f_3$. Como os vetores unitários f_1, f_2, f_3 são mutuamente perpendiculares, resulta daí que

$$x = \langle e_1, f_1 \rangle = a_1, \quad y = \langle e_1, f_2 \rangle = a_2 \quad \text{e} \quad z = \langle e_1, f_3 \rangle = a_3.$$

Portanto $e_1 = a_1 \cdot f_1 + a_2 \cdot f_2 + a_3 \cdot f_3$. De modo análogo se obtêm as outras duas igualdades que nos permitem escrever:

$$\begin{aligned} e_1 &= a_1 \cdot f_1 + a_2 \cdot f_2 + a_3 \cdot f_3 \\ e_2 &= b_1 \cdot f_1 + b_2 \cdot f_2 + b_3 \cdot f_3 \\ e_3 &= c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 + c_3 \cdot f_3. \end{aligned} \qquad (**)$$

Observe que os coeficientes a_i, b_i, c_i nas equações (**) são os mesmos das equações (*) porém dispostos em ordem diferente: a matriz dos coeficientes de (**) é a transposta da matriz de (*).

Dizer que as coordenadas do ponto P no sistema $OXYZ$ são (x, y, z) equivale a afirmar que $\overrightarrow{OP} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3$. Analogamente, a igualdade $\overrightarrow{O'P} = x' \cdot f_1 + y' \cdot f_2 + z' \cdot f_3$ significa que (x', y', z') são as coordenadas do mesmo ponto P no sistema $O'X'Y'Z'$.

Sejam ainda (m, n, p) as coordenadas da nova origem O' no sistema $OXYZ$, isto é,

$$\overrightarrow{OO'} = m \cdot e_1 + n \cdot e_2 + p \cdot e_3.$$

Para exprimir as coordenadas x', y', z' em função de x, y, z, começamos observando que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}, \quad \text{logo} \quad \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'},$$

ou seja:

$$x' \cdot f_1 + y' \cdot f_2 + z' \cdot f_3 = (x - m) \cdot e_1 + (y - n) \cdot e_2 + (z - p) \cdot e_3$$

Tomando o produto interno de ambos os membros desta igualdade por f_1 e observando que

$$\langle e_1, f_1 \rangle = a_1, \quad \langle e_2, f_1 \rangle = b_1, \quad \langle e_3, f_1 \rangle = c_1,$$

vem:

$$x' = a_1(x - m) + b_1(y - n) + c_1(z - p).$$

Analogamente se obtêm as outras duas igualdades que nos permitem escrever as equações de mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} x' &= a_1(x-m)+b_1(y-n)+c_1(z-p)\\ y' &= a_2(x-m)+b_2(y-n)+c_2(z-p)\\ z' &= a_3(x-m)+b_3(y-n)+c_3(z-p). \end{aligned} \tag{1}$$

É conveniente também saber exprimir x, y, z em função de x', y', z', ou seja, inverter as equações acima.

Para isto, partimos da igualdade $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$, isto é,

$$x\cdot e_1 + y\cdot e_2 + z\cdot e_3 = x'\cdot f_1 + y'\cdot f_2 + z'\cdot f_3 + m\cdot e_1 + n\cdot e_2 + p\cdot e_3,$$

e tomamos o produto interno de ambos os membros por e_1, obtendo

$$x = a_1x' + a_2y' + a_3z' + m.$$

Tomando produtos internos por e_2 e por e_3, obtemos as outras duas igualdades que nos permitem escrever:

$$\begin{aligned} x &= a_1x' + a_2y' + a_3z' + m\\ y &= b_1x' + b_2y' + b_3z' + n\\ z &= c_1x' + c_2y' + c_3z' + p. \end{aligned} \tag{2}$$

As fórmulas (1) e (2), que dão a mudança de coordenadas quando se passa de um sistema de eixos ortogonais para outro, põem em relevo as matrizes

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{m}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

chamadas respectivamente as *matrizes de passagem* de $OXYZ$ para $O'X'Y'Z'$ e vice-versa.

Escrevendo $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} m\\ n\\ p \end{bmatrix}$ e $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'\\ y'\\ z' \end{bmatrix}$ as equações (1) e (2) da mudança de coordenadas se escrevem sob forma matricial, como $\mathbf{x}' = \mathbf{m}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{v})$ e $\mathbf{x} = \mathbf{m}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{x}' + \mathbf{v}$.

Levando em conta que $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\{f_1, f_2, f_3\}$ são triedros formados por vetores unitários mutuamente ortogonais, resulta imediatamente das

equações (*) e (**) que as linhas de ambas estas matrizes são vetores unitários mutuamente ortogonais em $\mathbb{R}^3$. Outra maneira de exprimir este fato é afirmar que se tem $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^T = \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{m} = \mathbf{I}_3$, onde

$$\mathbf{I_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a *matriz identidade* 3×3.

Assim, a matriz de passagem de um sistema de eixos ortogonais para outro tem a peculiaridade de que sua transposta é também sua inversa. As matrizes com esta propriedade chamam-se matrizes *ortogonais*.

Para uma matriz 3×3, ser ortogonal significa portanto que suas linhas e suas colunas são vetores unitários mutuamente perpendiculares em $\mathbb{R}^3$.

Na realidade, se as linhas de uma matriz 3×3 são vetores unitários mutuamente ortogonais em $\mathbb{R}^3$, resulta daí que suas colunas têm também esta propriedade.

Esta afirmação foi, de fato, provada quando mostramos acima que as equações (**) resultam das equações (*). Basta interpretarmos, naquele argumento, e_1, e_2, e_3 como os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^3$ e f_1, f_2, f_3 como as linhas da matriz dada.

Da igualdade $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^T = \mathrm{I}$ resulta que

$$1 = \det \mathbf{I} = \det(\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^T) = \det \mathbf{m} \cdot \det \mathbf{m}^T = (\det \mathbf{m})^2.$$

Portanto $\det \mathbf{m} = \pm 1$ para toda matriz ortogonal $\mathbf{m}$.

Quando o determinante da matriz de passagem $\mathbf{m}$ é igual a $+1$, diz-se que os sistemas $OXYZ$ e $O'X'Y'Z'$ são igualmente orientados. Se $\det \mathbf{m} = -1$, esses sistemas de eixos têm orientação opostas.

Exemplo 41.1 Apliquemos as equações (1) e (2) em casos particulares bem simples. As equações (1), aplicadas ao ponto O', de coordenadas $x = m$, $y = n$, $z = p$, dizem que suas novas coordenadas são $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, como era de se esperar. Já o ponto $P = O' + f_1$, cujas coordenadas no sistema $O'X'Y'Z'$ são $(1, 0, 0)$, tem coordenadas $x = a_1 + m$, $y = b_1 + n$, $z = c_1 + p$ no sistema $OXYZ$, de acordo com as equações (2).

Um tipo especial de mudança de eixos é aquele em que $f_1 = e_1$, $f_2 = e_2$ e $f_3 = e_3$. Isto equivale a afirmar que os eixos $O'X'$ e $OX, O'Y'$

e OY, bem como O′Z′ e OZ são paralelos e de mesmos sentidos. Diz-se então que se trata de uma *translação de eixos*. Numa translação de eixos, o que conta é apenas a nova origem O′. Se as coordenadas de O′ no sistema OXYZ são (m, n, p) então as equações de mudança de coordenadas na translação de eixos são

$$x' = x - m, \quad y' = y - n, \quad z' = z - p,$$

donde

$$x = x' + m, \quad y = y' + n, \quad z = z' + p.$$

Ilustraremos a seguir, mediante dois exemplos extremamente elementares, como a translação de eixos pode simplificar a equação de uma superfície.

Exemplo 41.2 Seja Π o plano cuja equação no sistema de eixos OXYZ é $ax + by + cz = d$. Fixemos um ponto $O' = (m, n, p)$ nesse plano, logo $am + bn + cp = d$. Façamos uma translação de eixos, adotando O′ como a nova origem. As novas coordenadas (x', y', z') de um ponto P se relacionam com as antigas (x, y, z) pelas equações $x = x' + m$, $y = y' + n$, $z = z' + p$. Então P pertence ao plano Π se, e somente se,

$$\begin{aligned} d &= ax + by + cz = a(x' + m) + b(y' + n) + c(z' + p) \\ &= ax' + by' + cz' + am + bn + cp = ax' + by' + cz' + d. \end{aligned}$$

Equivalentemente: P está no plano Π se, e somente se,

$$ax' + by' + cz' = 0. \qquad (*)$$

Assim, no novo sistema de coordenadas, a equação do plano Π assume a forma ligeiramente mais simples (*).

Exemplo 41.3 Seja S a esfera de centro no ponto A e raio igual a r. Se, num dado sistema de eixos OXYZ, as coordenadas do ponto A são (a, b, c), a equação da esfera S nesse sistema é

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Uma translação de eixos colocando a nova origem no ponto A introduz coordenadas (x', y', z') em relação às quais a equação da esfera S torna-se $x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2$.

Exemplo 41.4 Seja $ax + by + cz = d$ a equação de um plano Π relativamente a um sistema de eixos $OXYZ$. Sabemos que o vetor u, de coordenadas (a, b, c) no sistema dado, é perpendicular ao plano Π, isto é, $\langle u, \overrightarrow{AB} \rangle = 0$ quaisquer que sejam os pontos A, B em Π. Sem perda de generalidade, podemos supor que $|u| = 1$, ou seja, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Se tomarmos um novo sistema de eixos $O'X'Y'Z'$, com origem O' em Π e com vetores unitários f_1, f_2, u é claro que, nas coordenadas x', y', z' relativas a este sistema, a equação do plano Π será $z' = 0$. Isto representa uma simplificação considerável. Resta apenas obter as fórmulas de mudança de coordenadas. O vetor $f_3 = u = (a, b, c)$ sendo conhecido, podemos supor $a^2 + b^2 \neq 0$ (do contrário seria $u = e_3$, e não haveria necessidade de mudar coordenadas). O vetor unitário f_2, devendo ser ortogonal a u, podemos tomá-lo como

$$f_2 = \left(\frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right).$$

Quanto a f_1, devendo ser unitário e ortogonal a ambos, f_1 e u, tomamos

$$f_1 = f_2 \times u = \left(\frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\sqrt{a^2 + b^2} \right).$$

A matriz ortogonal cujos elementos são os coeficientes das equações de mudança de coordenadas é então

$$m = \begin{bmatrix} \dfrac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \dfrac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} & -\sqrt{a^2 + b^2} \\ \dfrac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

Exercícios

1. Ache números α, β de modo que os múltiplos $\alpha\mathbf{m}$ e $\beta\mathbf{n}$ das matrizes abaixo sejam matrizes ortogonais

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Usando a matriz $\alpha\mathbf{m}$ do exercício anterior, efetue uma rotação dos eixos (mudança de coordenadas mantendo a origem fixa). Ache as novas coordenadas (x', y', z') dos pontos cujas coordenadas (x, y, z) são

a) $(-1, 2, 2)$ d) $(-1, 1, 0)$
b) $(0, 1, 1)$ e) $(-1, 1, -2)$
c) $(1, 1, 1)$ f) $(6, -3, 2)$

3. No exercício anterior, suponha que as coordenadas dadas são x', y', z'. Quais eram, em cada caso, x, y e z?

4. Ainda com a rotação dos eixos dada pela matriz ortogonal $\alpha\mathbf{m}$ acima, quais são, nas novas coordenadas x', y', z', as equações dos seguintes planos?

a) $2x + y + 2z = 1$ c) $2x - y = 1$
b) $2x - 2y + z = 3$ d) $x + y + z = 0$

5. Determine os valores de x e y tais que a matriz abaixo seja ortogonal

$$\mathbf{m} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 6 & x \\ 3 & 2 & y \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Efetuada a mudança de eixos dada pela matriz do exercício anterior (sem mover a origem), determine os ângulos que cada um dos novos eixos forma com o antigo.

7. Seja $\mathbf{m}$ uma matriz ortogonal 3×3. Se $\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}$, onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix},$$

prove que $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = x^2 + y^2 + z^2$. (Sugestão: $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = \mathbf{d}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{d}$.)

8. Se $\mathbf{m}$ é uma matriz ortogonal 2×2, prove que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix},$$

conforme seja $\det \cdot \mathbf{m} = 1$ ou $\det \cdot \mathbf{m} = -1$.

9. Considere as seguintes afirmações sobre uma matriz $\mathbf{m}$ do tipo 3×3:

a) As linhas de $\mathbf{m}$ são vetores unitários mutuamente ortogonais;
b) $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I_3}$;
c) As colunas de $\mathbf{m}$ são vetores unitários mutuamente ortogonais;
d) $\mathbf{m}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{I_3}$.

Mostre que a) $\Leftrightarrow$ b) e que c) $\Leftrightarrow$ d). Em seguida, use a Observação 39.2 para concluir que b) $\Leftrightarrow$ d), logo as quatro afirmações são equivalentes.

10. Suponha que a mudança de coordenadas $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$ se exprima matricialmente por $\mathbf{x}' = \mathbf{m} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{u})$, que a mudança $(x', y', z') \mapsto (x'', y'', z'')$ seja dada por $\mathbf{x}' = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{v})$ e que a mudança $(x', y', z') \mapsto (x'', y'', z'')$ é dada por $\mathbf{x}'' = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{w})$. Mostre que se tem $\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{m}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}$. Equivalentemente, tem-se $\mathbf{x} = \mathbf{m}^{\mathsf{T}}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}'' + \mathbf{m}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} + \mathbf{u}$.

42

Formas Quadráticas em $\mathbb{R}^3$

Uma *forma quadrática* em $\mathbb{R}^3$ é um polinômio homogêneo de grau 2 com três variáveis, ou seja, é uma função $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz.$$

Se, mantendo fixa a origem, tomarmos novos eixos em $\mathbb{R}^3$, teremos a mudança de coordenadas de (x, y, z) para (r, s, t), onde

$$x = a_1r + a_2s + a_3t, \quad y = b_1r + b_2s + b_3t, \quad z = c_1r + c_2s + c_3t,$$

como vimos na seção anterior. (Ao lidarmos com formas quadráticas, preferimos usar r, s, t em vez de x', y', z', por motivos óbvios.)

Teremos então

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= \varphi(a_1r + a_2s + a_3t, b_1r + b_2s + b_3t, c_1r + c_2s + c_3t)\\ &= A'r^2 + B's^2 + C't^2 + 2D'rs + 2E'rt + 2F'st\\ &= \overline{\varphi}(r, s, t).\end{aligned}$$

Nosso principal objetivo nesta seção é mostrar que, mediante uma conveniente escolha de eixos (mantendo a origem fixa), é possível fazer com que, nas novas coordenadas r, s, t, se tenha $D' = E' = F' = 0$, portanto

$$\varphi(x, y, z) = \overline{\varphi}(r, s, t) = A'r^2 + B's^2 + C't^2.$$

Esta expressão simplificada da forma quadrática φ permite melhor visualizar as superfícies definidas por equações do tipo $\varphi(x, y, z)=c$.

(Para cada $c \in \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que $\varphi(x, y, z)=c$ chama-se a *superfície de nível* c da forma φ.)

Teorema. *Dada a forma quadrática*

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz,$$

é possível, mediante uma escolha conveniente de eixos ortogonais, introduzir novas coordenadas r, s, t *de modo a ter-se*

$$\varphi(x, y, z) = \overline{\varphi}(r, s, t) = A'r^2 + B's^2 + C't^2.$$

Demonstração: Dentre todos os vetores $u = (x, y, z)$ com $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, (vetores unitários) seja u_1 tal que o valor $\varphi(u_1)$ é máximo. Efetuando, se necessário, uma mudança de eixos, podemos admitir que $u_1 = (1, 0, 0)$. Então $\varphi(1, 0, 0) = A$ é o maior valor de $\varphi(x, y, z)$ com $x^2+y^2+z^2 = 1$. Nestas condições, afirmamos que se tem $D = E = 0$. Isto resulta da Observação 20.2 no final da Seção 20. Com efeito, $\varphi(1, 0, 0)$ é, em particular, o maior valor de

$$\varphi(x, y, 0) = Ax^2 + By^2 + 2Dxy$$

quando $x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 0^2 = 1$. De acordo com aquela Observação, isto implica que $D = 0$ e que $\varphi(1, 0, 0)$ é o maior valor de $\varphi(x, y, z)$ com $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$. Analogamente se vê que $E = 0$. Concluímos então que, em qualquer sistema de coordenadas (r, s, t) no qual u_1 seja vetor unitário do primeiro eixo, tem-se

$$\overline{\varphi}(r, s, t) = A'r^2 + B's^2 + C't^2 + F'st.$$

Ora, podemos escolher no plano $r = 0$ as coordenadas s, t de tal modo que $\overline{\varphi}(0, 1, 0)$ seja o maior valor de $\overline{\varphi}(0, s, t)$ quando $s^2 + t^2 = 1$. Então (novamente pela Observação 20.2), $F' = 0$ e daí

$$\overline{\varphi}(r, s, t) = A'r^2 + B's^2 + C't^2,$$

como se desejava demonstrar.

Observação 42.1 A existência de um sistema de eixos em relação ao qual os coeficientes D, E e F se anulam será usada nas três próximas seções a fim de identificar geometricamente as formas possíveis da superfície de nível de uma função quadrática (superfícies quádricas). Na

Seção 46 apresentaremos o método algébrico que determina especificamente a mudança de eixos que deverá ser efetuada.

Exemplo 42.1 Seja $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a forma quadrática dada pela expressão

$$\varphi(x, y, z) = -2x^2 + 5y^2 + 11z^2 + 12xy - 12xz.$$

Efetuando a mudança de coordenadas (rotação dos eixos):

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{7}(2r - 3s + 6t) \\ y &= \frac{1}{7}(6r - 2s - 3t) \\ z &= \frac{1}{7}(3r + 6s + 2t), \end{aligned}$$

obtemos a nova forma quadrática

$$\overline{\varphi}(r, s, t) = 7(r^2 + 2s^2 - t^2),$$

que é desprovida de termos contendo rs, rt e st.

43

As Quádricas Centrais

A expressão geral de uma função quadrática $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é

$$\psi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J.$$

As superfícies de nível $\psi(x, y, z) = d$ chamam-se *quádricas*. Quando $G = H = I = J = 0$, temos a forma quadrática

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz,$$

cujas superfícies de nível $\varphi(x, y, z) = d$ chamam-se *quádricas centrais*. O adjetivo "central" provém de que, sendo $\varphi(-x, -y, -z) = \varphi(x, y, z)$, o ponto $P = (x, y, z)$ pertence à superfície S de equação $\varphi(x, y, z) = d$ se, e somente se, o ponto $P' = (-x, -y, -z)$ também pertence a S; logo a origem $0 = (0, 0, 0)$ é um centro de simetria de S.

Nesta seção faremos uma lista de todas as quádricas centrais. Usando o que foi provado na seção anterior, admitiremos que, dada a forma quadrática φ, um sistema de eixos ortogonais foi escolhido de modo que se tem $D = E = F = 0$, ou seja:

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2.$$

As seguintes afirmações são evidentes:

1ª) Quando $d \neq 0$, tem-se $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = d$ se, e somente se, $(A/d)x^2 + (B/d)y^2 + (C/d)z^2 = 1$.

2ª) Se $A/d > 0$ então, pondo $a = \sqrt{d/A}$, tem-se $(A/d)x^2 = x^2/a^2$. Se $A/d < 0$ então, pondo $a = \sqrt{-d/A}$, tem-se $(A/d)x^2 = -x^2/a^2$. Analogamente, $(B/d)y^2 = \pm y^2/b^2$, com $b = \sqrt{\pm d/B}$ e $(C/d)z^2 = \pm z^2/c^2$, com $c = \sqrt{\pm d/C}$. Note que $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

3ª) $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ se, e somente se $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$.

Destes três fatos resulta que as equações a seguir definem todas as superfícies de nível possíveis de uma forma quadrática (exceto por uma eventual troca de nomes dos eixos):

(i) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$ (ii) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1.$

(iii) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$ (iv) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1.$

(v) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$ (vi) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$

(vii) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$ (viii) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

(ix) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$ (x) $\dfrac{x^2}{a^2} = 1.$

(xi) $\dfrac{x^2}{a^2} = -1.$ (xii) $\dfrac{x^2}{a^2} = 0.$

(xiii) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$

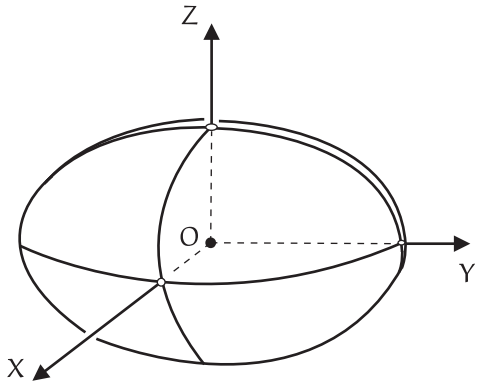


Figura 43.1 - O elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

A superfície E, definida pela equação (i), chama-se um *elipsóide*. Suas interseções com os planos Π_{xy}, Π_{xz} e Π_{yz} são respectivamente as elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

O ponto $P = (x, y, z)$ pertence à esfera unitária $x^2+y^2+z^2 = 1$ se, e somente se, o ponto $P' = (ax, by, cz)$ pertence ao elipsóide E. Portanto, E resulta da esfera unitária pela transformação $P \mapsto P'$, que consiste em multiplicar a primeira coordenada por a, a segunda por b e a terceira por c. Os números $2a, 2b$ e $2c$ são os comprimentos dos eixos (de simetria) do elipsóide, cada um deles contido num eixo coordenado. Se dois desses três números são iguais, tem-se um elipsóide de revolução. Por exemplo, quando $b = c$, o elipsóide $x^2/a^2+(y^2+z^2)/b^2 = 1$ é gerado pela rotação da elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, contida no plano $z = 0$, em torno do eixo OX. (Ou então da elipse $x^2/a^2+z^2/b^2 = 1$, contida no plano $y = 0$, em torno do mesmo eixo.)

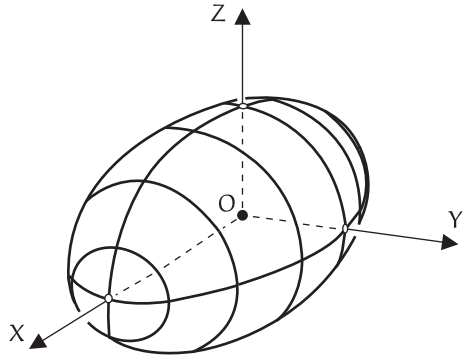


Figura 43.2 - Elipsóide de revolução $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$.

A equação (ii) evidentemente define o conjunto vazio, isto é, nenhum ponto do espaço a satisfaz.

A superfície H_1, definida pela equação (iii), é chamada um *hiperbolóide de uma folha*. Sua interseção com o plano Π_{xz} é a hipérbole $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1$ e com o plano Π_{yz} é a hipérbole $y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$. Por outro lado, a interseção da superfície H_1 com qualquer plano horizontal $z = d$ é a curva de equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 - d^2/c^2 = 1$, ou $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 + d^2/c^2$, logo é uma elipse. Quando $a = b$ essas interseções são circunferências horizontais e H_1 é um *hiperbolóide de revolução*, gerado pela rotação da hipérbole $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1$ (situada no plano Π_{xz}) em torno do eixo OZ, ou da hipérbole $y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ (contida no plano Π_{yz}) em torno do mesmo eixo OZ.

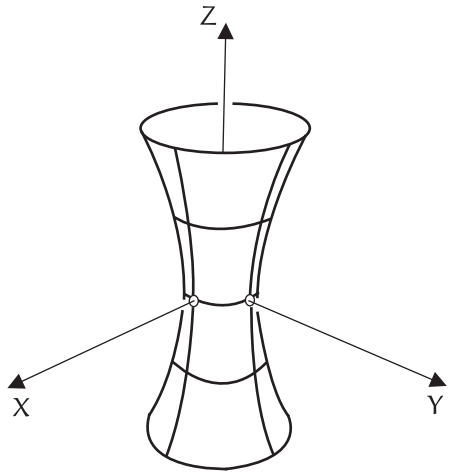


Figura 43.3 - Hiperbolóide de uma folha $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

A equação (iv), quando posta sob a forma

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

deixa claro que todos os pontos $P = (x, y, z)$ da superfície H_2 por ela definida cumprem a condição $|z| \geq c$. Noutras palavras, H_2 não possue pontos entre os planos horizontais $z = c$ e $z = -c$. A interseção de H_2 com qualquer plano horizontal $z = d$ com $|d| > c$ é a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = -1 + d^2/c^2$. Além disso, a superfície H_2 intersecta o plano Π_{xz} segundo a hipérbole $z^2/c^2 - x^2/a^2 = 1$, e o plano Π_{yz} segundo a hipérbole $z^2/c^2 - y^2/a^2 = 1$. A superfície H_2 é chamada um *hiperbolóide de duas folhas*. Quando $a = b$, H_2 chama-se um *hiperbolóide de revolução* com duas folhas. Neste caso, sua interseção com o plano horizontal $z = d$, com $|d| > c$, é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2\left(\frac{d^2}{c^2} - 1\right)$ e a superfície H_2 é obtida fazendo girar a hipérbole $z^2/c^2 - x^2/a^2 = 1$, situada no plano Π_{xz}, em torno do eixo OZ, ou a hipérbole $z^2/c^2 - y^2/b^2 = 1$, contida no plano Π_{yz}, em torno do mesmo eixo.

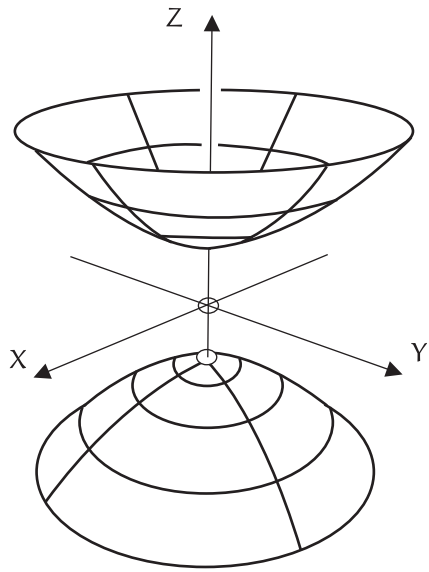


Figura 43.4 - Hiperbolóide de duas folhas $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.

A equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 0$, item (v) da lista acima, é satisfeita apenas pela origem $O = (0, 0, 0)$.

A equação (vi), $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2 = 0$, representa uma superfície S. A interseção de S com o plano $z = c$ é a elipse E, definida naquele plano pela equação $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$. Afirmamos que S *é o cone duplo com vértice na origem* $O = (0, 0, 0)$ *e base na elipse* E, ou seja, S é a reunião das retas que ligam O aos pontos de E. Para ver isto, usamos o fato de que a equação (vi) é homogênea, isto é, se o ponto $P = (x, y, z)$ a satisfaz então, para todo $t \in \mathbb{R}$, o ponto $P_t = (tx, ty, tz)$ também a satisfaz. Isto implica que a reta que liga O a qualquer ponto da elipse E está contida na superfície S. Noutras palavras, S contém o cone de vértice O e base E. Reciprocamente, se $P = (x, y, z)$ é um ponto qualquer de S diferente de O então $z \neq 0$ (pois, como $z^2/c^2 = x^2/a^2 + y^2/b^2$, se fosse $z = 0$, seriam também $x = 0$ e $y = 0$ logo teríamos $P = O$). Então, pondo $t = c/z$, temos $P_t = (tx, ty, tz) = (tx, ty, c)$ em E e daí P pertence à reta que liga O a P_t, ou seja todo ponto $P \neq O$ em S está no cone de vértice O e base E. (O caso $P = O$ é trivial.) Portanto S é igual ao cone de vértice O e base E.

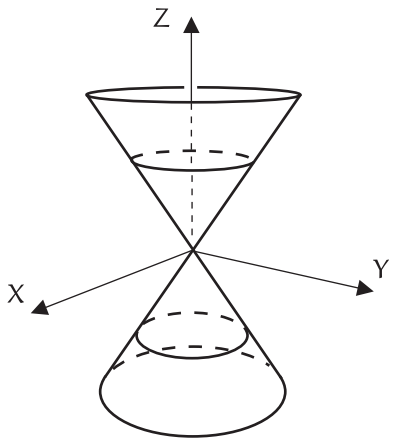


Figura 43.5 - Cone duplo de base eliptica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$

As soluções da equação (vii), que não contém z, são todos os pontos $P = (x, y, z)$ tais que $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Logo, esta equação define o *cilindro reto com base na elipse* $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ do plano Π_{xy}. (Reunião das retas verticais que passam pelos pontos dessa elipse.)

Analogamente, a superfície definida pela equação (viii), $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, é o *cilindro reto com base na hipérbole* definida por esta equação no plano Π_{xy}. (Reunião das retas verticais que passam pelos pontos dessa hipérbole.)

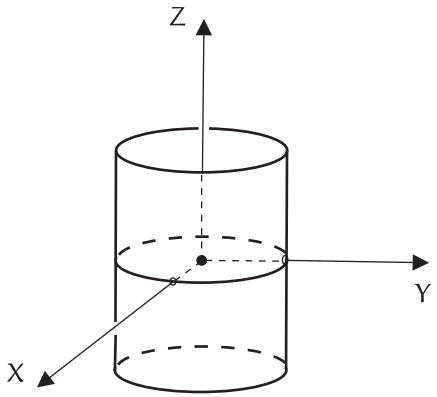


Figura 43.6 - Cilindro reto de base eliptica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

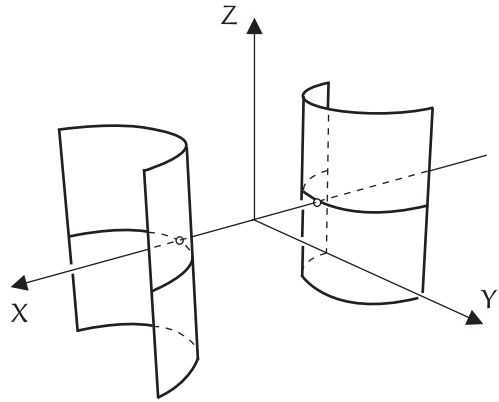


Figura 43.7 - Cilindro reto de base hiperbólica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

A equação (ix) é $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$, ou seja, $(x/a + y/b)(x/a - y/b) = 0$. Ela representa a reunião de dois planos verticais que cortam o plano Π_{xy} segundo as retas $x/a + y/b = 0$ e $x/a - y/b = 0$.

A equação (x), $x^2/a^2 = 1$, representa o par de planos verticais $x = a$ e $x = -a$, paralelos ao plano Π_{yz}.

A equação (xi), $x^2/a^2 = -1$, representa o conjunto vazio, pois nenhum ponto (x, y, z) a satisfaz.

A equação (xii), $x^2/a^2 = 0$, representa o plano Π_{yz}, pois equivale a $x = 0$.

Finalmente, a equação (xiii) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$ representa a reta OZ, pois equivale a $x = y = 0$.

Exercícios

1. Escolhendo convenientemente os eixos, mostre que a interseção de um plano com uma quádrica central é uma cônica. Em particular, mostre que a interseção de um plano com um elipsóide é uma elipse.

2. Considere o hiperbolóide de uma folha H dado pela equação $x^2 + y^2 = 1 + z^2$. Mostre que por cada um dos seus pontos passam duas retas inteiramente contidas na superfície H. Generalize para qualquer hiperbolóide de uma folha. [Sugestão: $x^2 + y^2 = 1 + z^2 \Leftrightarrow (x + z)(x - z) = (1 + y)(1 - y)$.]

44

Completando Quadrados em $\mathbb{R}^3$

Vimos na Seção 42 que, dada uma forma quadrática $\varphi(x, y, z)$, é sempre possível mudar os eixos ortogonais, obtendo assim novas coordenadas r, s, t, em relação às quais φ admite a expressão $A'r^2 + B's^2 + C't^2$. Este resultado nos permitiu fazer, na Seção 43, uma relação completa das superfícies que podem ser representadas por uma equação do tipo $\varphi(x, y, z) = d$.

Mas um problema ainda persiste: dada a equação

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = d,$$

como determinar efetivamente, dentre os tipos descritos na Seção 43, qual a superfície que ela define?

Este problema será resolvido agora, pelo método de completar o quadrado. Inicialmente, estenderemos às formas quadráticas $\varphi(x, y, z)$ algumas definições dadas antes para $\varphi(x, y)$.

Diremos que a forma quadrática $\varphi(x, y, z)$ é *positiva* (respectivamente, *negativa*) quando $\varphi(x, y, z) > 0$ (respectivamente, $\varphi(x, y, z) < 0$) para todo $(x, y, z) \neq 0$. Se, para quaisquer x, y, z, tivermos $\varphi(x, y, z) \geq 0$ (respect. $\varphi(x, y, z) \leq 0$), diremos que φ é *não-negativa* (respect. *não-positiva*). Finalmente, quando existirem pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ tais que $\varphi(x_1, y_1, z_1) > 0$ e $\varphi(x_2, y_2, z_2) < 0$, diremos que φ é *indefinida*.

As seguintes três afirmações serão justificadas ao discutirmos os exemplos abaixo.

1. Quando a forma quadrática φ é positiva ou negativa, a superfície de nível $\varphi(x,y,z) = d$ é um elipsóide, é vazia ou reduz-se à origem, conforme d tenha o sinal de φ, sinal contrário ao de φ ou seja zero.

2. Quando φ é não-negativa ou não-positiva e existem pontos $P = (x,y,z) \neq 0$ tais que $\varphi(x,y,z) = 0$ então a superfície de nível $\varphi(x,y,z) = d$ é um cilindro de base elíptica, um par de planos paralelos, um único plano, uma reta ou é vazia.

3. Finalmente, se a forma quadrática φ é indefinida (isto é, muda de sinal) então a superfície de nível $\varphi(x,y,z) = d$ pode ser um hiperbolóide de uma ou duas folhas, um cone, um cilindro de base hiperbólica ou um par de planos que se cortam segundo uma reta.

Para completar quadrados na forma

$$\varphi(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$$

escolhemos, entre os números A, B e C, um que seja diferente de zero. Digamos que se tenha $A \neq 0$. Vamos então primeiro fazer desaparecer os produtos xy e xz, que contêm x. (O caso em que $A = B = C = 0$ será tratado separadamente, logo em seguida.) Para isso, escrevemos a soma das parcelas contendo x como

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Dxy + 2Exz &= A\left[x^2 + 2x\left(\frac{D}{A}y + \frac{E}{A}z\right)\right] \\ &= A\left[\left(x + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A}z\right)^2 - \left(\frac{D}{A}y + \frac{E}{A}z\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Pondo $s = x + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A}z$, vem

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,z) &= As^2 + \left(B - \frac{D^2}{A}\right)y^2 + \left(C - \frac{E^2}{A}\right)z^2 + 2\left(F - \frac{DE}{A}\right)yz \\ &= As^2 + \psi(y,z), \end{aligned}$$

onde ψ é uma forma quadrática com duas variáveis, para a qual já sabemos como completar o quadrado.

Quando se tiver $A = B = C = 0$, ou seja, quando

$$\varphi(x,y,z) = 2Dxy + 2Exz + 2Fyz,$$

escolhemos, entre os números D, E e F, um que seja diferente de zero. Digamos que $D \neq 0$. Então faremos a mudança de variáveis $x = r + s$,

$y = r - s$, logo $xy = r^2 - s^2$, $xz = rz + sz$, $yz = rz - sz$ e a forma se escreve como

$$\varphi(x, y, z) = 2Dr^2 - 2Ds^2 + 2(E + F)rz + 2(E - F)sz,$$

recaindo no caso anterior.

Depois de completar todos os quadrados, a forma dada se escreve como

$$\varphi(x, y, z) = \overline{\varphi}(r, s, t) = A'r^2 + B's^2 + C't^2$$

e agora é fácil determinar seu sinal.

Ela é *positiva* (respect. *negativa*) quando os coeficientes A', B' e C' são positivos (respect. negativos). Ela é *não-negativa* (respect. *não-positiva*) quando A', B' e C' são ≥ 0 (respect. ≤ 0). Ela é *indefinida* quando um dos coeficientes A', B', C' é positivo e outro é negativo.

Agora ilustraremos o método de completar quadrados com alguns exemplos.

Exemplo 44.1 Seja $\varphi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 - xy - 2xz - 3yz$.

Para eliminar os produtos xy e xz, pomos $2x$ em evidência nos termos que os contêm. Então ficamos com

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= x^2 - 2x\left(\frac{y}{2} + z\right) + 2y^2 + 4z^2 - 3yz \\ &= \left(x - \frac{y}{2} - z\right)^2 - \left(\frac{y}{2} + z\right)^2 + 2y^2 + 4z^2 - 3yz.\end{aligned}$$

Pondo $s = x - y/2 - z$ e reduzindo termos semelhantes, vem:

$$\varphi = s^2 + \frac{7}{4}y^2 + 3z^2 - 4yz.$$

Em seguida, completamos mais um quadrado:

$$\begin{aligned}\varphi &= s^2 + 3\left(z^2 - 2z \cdot \frac{2}{3}y + \frac{7}{12}y^2\right) \\ &= s^2 + 3\left[\left(z - \frac{2}{3}y\right)^2 - \frac{4}{9}y^2 + \frac{7}{12}y^2\right] \\ &= s^2 + 3t^2 + \frac{5}{12}y^2, \text{ onde } t = z - \frac{2}{3}y.\end{aligned}$$

Portanto a forma quadrática φ é positiva. Embora as novas coordenadas s, y, t não provenham de eixos ortogonais, isto assegura que

as superfícies de nível $\varphi(x,y,z) = d$, com $d > 0$, são elipsóides. Com efeito, a Seção 42 garante a existência de eixos ortogonais em relação aos quais a forma φ se exprime como uma combinação linear de quadrados, $\varphi(x,y,z) = \overline{\varphi}(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = A\overline{x}^2 + B\overline{y}^2 + C\overline{z}^2$. Então a positividade de φ obriga $A > 0$, $B > 0$ e $C > 0$ logo, conforme a Seção 43, as superfícies de nível $\varphi(x,y,z) = d$, com $d > 0$, são elipsóides.

Exemplo 44.2 Tomemos $\varphi(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xy - 2xz - 3yz$.

Seguindo o procedimento do exemplo anterior, temos

$$\begin{aligned}
\varphi &= x^2 - 2x\left(\frac{y}{2} + z\right) + 2y^2 + 3z^2 - 3yz \\
&= \left(x - \frac{y}{2} - z\right)^2 - \left(\frac{y}{2} + z\right)^2 + 2y^2 + 3z^2 - 3yz \\
&= s^2 + \frac{7}{4}y^2 + 2z^2 - 4yz \quad (\text{com } s = x - \frac{y}{2} - z) \\
&= s^2 + 2\left(z^2 - 2yz + \frac{7}{8}y^2\right) \\
&= s^2 + 2\left[(z-y)^2 - \frac{1}{8}y^2\right] \\
&= s^2 + 2t^2 - \frac{y^2}{4}, \quad \text{com } t = z - y.
\end{aligned}$$

Portanto a forma quadrática φ é indefinida. A superfície de nível

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xy - 2xz - 3yz = d$$

é um cone quando $d = 0$ e é um hiperbolóide quando $d \neq 0$. Escrevendo-a como

$$\left(x - \frac{y}{2} - z\right)^2 + 2(z-y)^2 - d = \frac{y^2}{4},$$

fica claro que, quando $d < 0$, os pontos desse hiperbolóide cumprem todos a condição $y^2/4 \geq |d|$, ou seja $|y| \geq 2\sqrt{|d|}$. Assim, quando o nível d é negativo, a superfície $\varphi(x,y,z) = d$ não possui pontos entre os planos $y = -2\sqrt{|d|}$ e $y = 2\sqrt{|d|}$. Logo é um hiperbolóide de duas folhas. Por outro lado, quando $d > 0$, a superfície de nível $\varphi(x,y,z) = d$ é um hiperbolóide de uma folha. Isto resulta da discussão sobre hiperbolóides feita na Seção 43 (item iii) mas pode ser visto diretamente se observarmos que, para $d > 0$, a interseção da superfícies de nível $\varphi(x,y,z) = d$

com qualquer plano vertical $y = m$ é a curva desse plano formada pelos pontos (x, m, z) tais que

$$x^2 + 3z^2 - 2xz - mx - 3mz = d - 2m^2.$$

Ora, esta curva é uma elipse pois a translação $x = \overline{x} + \frac{3}{2}m$, $z = \overline{z} + m$ introduz nesse plano coordenadas $\overline{x}, \overline{y}$ nas quais a equação acima se torna

$$\overline{x}^2 + 3\overline{z}^2 - 2\overline{x}\overline{z} = d + \frac{1}{4}m^2,$$

portanto ela define, no plano $y = m$, a curva de nível positivo $d + \frac{1}{4}m^2$ da forma quadrática positiva $\overline{x}^2 + 3\overline{z}^2 - 2\overline{x}\overline{z}$. Vendo que a superfície de nível $\varphi(x, y, z) = d$, com $d > 0$, corta cada plano vertical $y = m$ segundo uma elipse, concluímos que tal superfície é um hiperbolóide de uma folha.

Exemplo 44.3 Seja $\varphi(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 4yz$.

Para eliminar os termos em xy e xz, escrevemos:

$$\begin{aligned}
\varphi &= x^2 + 2x(-2y + z) + 5y^2 + z^2 - 4yz \\
&= (x - 2y + z)^2 - (-2y + z)^2 + 5y^2 + z^2 - 4yz \\
&= s^2 - 4y^2 + 4yz - z^2 + 5y^2 + z^2 - 4yz \\
&= s^2 + y^2, \quad \text{onde} \quad s = x - 2y + z.
\end{aligned}$$

Portanto a forma quadrática φ é não-negativa. (Mas não é positiva, pois $\varphi(x, 0, -x) = 0$ para todo x.) A superfície de nível $\varphi(x, y, z) = d$ é vazia quando $d < 0$. Se $d = 0$, ela é o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que

$$(x - 2y + z)^2 + y^2 = 0,$$

logo $y = 0$ e $x = -z$. Portanto a "superfície" $\varphi(x, y, z) = 0$ reduz-se à reta g, formada pelos pontos $(-z, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$; g é bissetriz do segundo quadrante do plano Π_{xz}. Quando $d > 0$ a superfície S, definida por $\varphi(x, y, z) = d$, corta o plano $z = 0$ segundo a curva

$$(x - 2y)^2 + y^2 = d,$$

ou seja,

$$x^2 - 4xy + 5y^2 = d,$$

a qual reconhecemos imediatamente como uma elipse E. Escrevendo a equação $\varphi(x, y, z) = d$ sob a forma

$$(x + z - 2y)^2 + y^2 = d,$$

vemos que o ponto $P = (x, y, z)$ pertence à superfície S se, e somente se, o ponto $P_0 = (x + z, y, 0)$ pertence à elipse E. Mas $P = P_0 + v$, com $v = (-z, 0, z)$. Como $(-z, 0, z)$ é um ponto arbitrário da reta g, concluímos que a superfície S é a reunião das retas paralelas a g, tiradas a partir dos pontos da elipse E. Noutras palavras, S é o cilindro (oblíquo) de base E e geratriz g.

Exemplo 44.4 Seja $\varphi(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$.

A fim de eliminar os termos que contêm xy e xz, escrevemos:

$$\begin{aligned}
\varphi &= x^2 + 2x(2y + z) + 3y^2 + z^2 + 4yz \\
&= (x + 2y + z)^2 - (2y + z)^2 + 3y^2 + z^2 + 4yz \\
&= s^2 - 4y^2 - 4yz - z^2 + 3y^2 + z^2 + 4yz \\
&= s^2 - y^2, \quad \text{com} \quad s = x + 2y + z.
\end{aligned}$$

Vemos assim que a forma quadrática φ é indefinida. Sua superfície de nível zero é representada pela equação $s^2 - y^2 = 0$, ou seja $(s+y)(s-y) = 0$. Como $s + y = x + 3y + z$ e $s - y = x + y + z$, vemos que tal superfície é formada pelos planos $x + 3y + z = 0$ e $x + y + z = 0$, cuja interseção é a reta g, bissetriz do segundo quadrante do plano $y = 0$. Quando $d \neq 0$, a superfície de nível $\varphi(x, y, z) = d$ corta o plano horizontal $z = 0$ segundo a curva $(x + 2y)^2 - y^2 = d$, ou $x^2 + 4xy + 3y^2 = d$, que vemos ser uma hipérbole H. O ponto $P = (x, y, z)$ pertence a essa superfície se, e somente se $(x + 2y + z)^2 - y^2 = d$, ou seja, se, e somente se, o ponto $P_0 = (x + z, y, 0)$ pertence à hipérbole H. Como $P = P_0 + v$, onde $v = (-z, 0, z)$ e o ponto $(-z, 0, z)$ está sobre a reta g, concluímos que, para todo $d \neq 0$, a superfície de nível $\varphi(x, y, z) = d$ é o cilindro (oblíquo) de base H e geratriz g, formado pelas retas paralelas a g tiradas por pontos de H.

Exemplo 44.5 Seja $\varphi(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$.

Temos

$$\begin{aligned}\varphi &= x^2 + 2x(2y+z) + 4y^2 + z^2 + 4yz \\ &= (x+2y+z)^2 - (2y+z)^2 + 4y^2 + z^2 + 4yz \\ &= s^2 - 4y^2 - 4yz - z^2 + 4y^2 + z^2 + 4yz \\ &= s^2, \quad \text{com} \quad s = x + 2y + z.\end{aligned}$$

Resulta portanto que a equação $x^2+4y^2+z^2+4xy+2xz+4yz = d$ não tem solução quando $d < 0$, define o plano $x+2y+z = 0$ quando $d = 0$ e representa o par de planos paralelos $x+2y+z = \sqrt{d}$ e $x+2y+z = -\sqrt{d}$ quando $d > 0$.

Exercícios

1. Completando os quadrados, identifique as superfícies de nível definidas por cada uma das formas quadráticas abaixo:

a) $4x^2 + 3y^2 - z^2 - 12xy + 4xz - 8yz$
b) $-x^2 - y^2 - 7z^2 + 16xy + 8xz + 8yz$
c) $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz$
d) $3x^2 - 3y^2 - 5z^2 - 2xy - 6xz - 6yz$
e) $3x^2 + y^2 - 2xy + 2xz - 2yz$
f) $-2x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 2xy + 6xz + 6yz$
g) $4x^2 + y^2 - 8z^2 + 4xy - 4xz + 8yz$
h) $3x^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 4yz$.

45

A Equação Geral do Segundo Grau em $\mathbb{R}^3$

Estudaremos nesta seção as superfícies de nível de uma função quadrática com três variáveis, $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ou seja:

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J.$$

Veremos que tais superfícies são as quádricas centrais, que examinamos nas três seções anteriores, mais os parabolóides.

Como no caso de duas variáveis, tentamos eliminar na expressão de φ os termos em x, y e z mediante uma translação de eixos. Mostraremos que isto é possível, exceto no caso de um parabolóide.

Por simplicidade, dada a função φ, admitiremos que os eixos ortogonais já foram escolhidos de modo a eliminar os termos em xy, xz e yz, conforme ficou estabelecido na Seção 42. Então, sem perda de generalidade, basta considerar o caso da função

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J.$$

Procuraremos determinar os números h, k, m tais que a mudança de coordenadas de x, y, z para r, s, t, dada por

$$x = r + h, \quad y = s + k, \quad z = t + m,$$

(translação de eixos) faça desaparecerem os termos do primeiro grau.

Ora, temos

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= \varphi(r+h, s+k, t+m) = \overline{\varphi}(r,s,t)\\ &= A(r+h)^2 + B(s+k)^2 + C(t+m)^2\\ &\quad + G(r+h) + H(s+k) + I(t+m) + J\\ &= Ar^2 + Bs^2 + Ct^2 + G'r + H's + I't + J',\end{aligned}$$

com

$$G' = 2Ah + G, \quad H' = 2Bk + H, \quad K' = 2Cm + I.$$

Há quatro casos possíveis:

1º) A, B e C *são diferentes de zero*.

Então, tomando $h = -G/2A$, $k = -H/2B$ e $m = -I/2C$, teremos $G' = H' = I' = 0$ e a equação $\varphi(x,y,z) = d$ se reduz a $Ar^2+Bs^2+Ct^2 = d - J'$, logo a superfície de nível d da função φ é uma das quádricas centrais estudadas nas três seções anteriores.

2º) *Apenas um dos coeficientes* A, B, C *é zero e os outros dois têm o mesmo sinal*.

Para fixar as idéias, admitamos que $C = 0$, logo $AB > 0$. Temos:

$$\varphi(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Gx + Hy + Iz + J.$$

A mudança de coordenadas $x = r - G/2A$, $y = s - H/2B$ (mantendo a coordenada z) nos dá

$$\varphi(x,y,z) = \overline{\varphi}(r,s,z) = Ar^2 + Bs^2 + Iz + J'.$$

Há duas possibilidades: ou $I = 0$ ou $I \neq 0$. Na primeira hipótese, em termos das coordenadas r, s, z, a função se escreve como $Ar^2 + Bs^2 + J'$. Então a equação $\varphi(x,y,z) = d$, ou seja, $Ar^2 + Bs^2 = d - J'$ representa um cilindro vertical de base elíptica quando $d - J'$ tem o mesmo sinal de A e B, o conjunto vazio no caso contrário e a reta vertical $r = s = 0$ (ou seja, $x = -G/2A$, $y = -H/2B$) quando $d = J'$.

A segunda possibilidade é $I \neq 0$. Então a equação $\varphi(x,y,z) = d$ se exprime por meio das coordenadas r, s, z como $z = A'r^2 + B's^2 + p$ com $A' = -A/I$, $B' = -B/I$ e $p = (d - J')/I$.

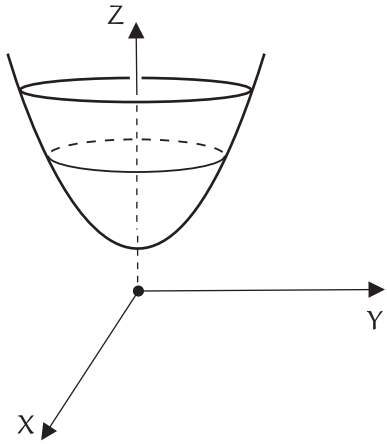


Figura 45.1 - O parabolóide eliptico $z = Ax^2 + By^2 + C$, com $A > 0$ e $B > 0$.

A superfície representada pela equação $z = A'r^2 + B's^2 + p$ (que resulta de $\varphi(x, y, z) = d$ por meio de uma translação horizontal) chama-se um *parabolóide elíptico*. Suas interseções com planos horizontais são elipses. O parabolóide tem sua concavidade voltada para cima quando A' e B' são positivos e para baixo que A' e B' são negativos.

3º) *Apenas um dos coeficientes* A, B, C *é zero e os outros dois têm sinais opostos*.

Para fixar as idéias, suponhamos $C = 0$. Então a função quadrática φ se escreve como

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Gx + Hy + Iz + J.$$

com $AB < 0$. Como no caso anterior, uma translação horizontal dos eixos introduz coordenadas r, s, z tais que

$$\varphi(x, y, z) = \overline{\varphi}(r, s, z) = Ar^2 + Bs^2 + Iz + J'.$$

Se for $I = 0$, a equação $\varphi(x, y, z) = d$ equivale a $Ar^2 + Bs^2 = d - J'$ logo representa um cilindro vertical cuja base é uma hipérbole, (ou um par de planos que se intersectam segundo a reta vertical $r = s = 0$, caso se tenha $d = J'$).

Se for $I \neq 0$, a equação $\varphi(x, y, z) = d$ se escreve, em termos das coordenadas r, s, z, como

$$z = A'r^2 + B's^2 + p, \text{ onde } A' = -A/I,\ B' = -B/I \text{ e } p = (d - J')/I.$$

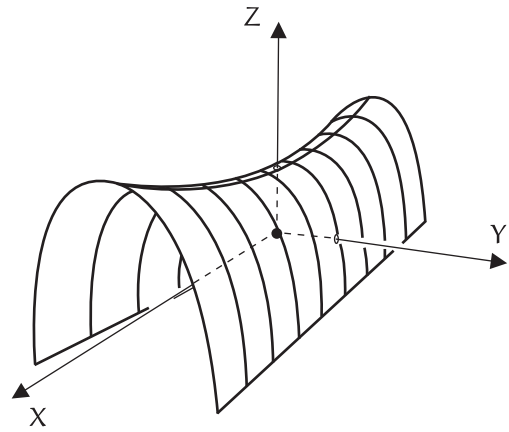


Figura 45.2 - O parabolóide hiperbólico $z = Ax^2 - By^2 + C$, com $A > 0$ e $B > 0$.

Note-se que A' e B' têm sinais opostos.

A superfície representada pela equação $z = A'r^2 + B's^2 + p$ (que resulta de $z = A'x^2 + B'y^2 + p$ por uma translação horizontal) chama-se um *parabolóide hiperbólico*. Ela é gerada por uma parábola que se desloca paralelamente, com seu vértice deslizando sobre outra parábola que tem sentido invertido.

4º) *Um dos coeficientes* A, B, C *é diferente de zero e os outros dois são nulos*.

Sejam $A \neq 0$ e $B = C = 0$. A função quadrática φ se escreve como

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + Gx + Hy + Iz + J.$$

A mudança de coordenadas $x = r - G/2A$, mantendo y e z, elimina o termo em x, ficando

$$\varphi(x, y, z) = \overline{\varphi}(r, y, z) = Ar^2 + Hy + Iz + J'.$$

Se $H = I = 0$, a equação $\varphi(x, y, z) = d$ equivale a $r^2 = (d - J')/A$, logo define um par de planos perpendiculares ao eixo OX (se $(d - J')/A$ for positivo), um único desses planos (se $d = J'$) ou o conjunto vazio (se $(d - J')/A < 0$).

Para encerrar a discussão do 4º caso, suponhamos que um dos coeficientes H, I (digamos I) seja diferente de zero. Então a equação $\varphi(x, y, z) = d$, ou seja, $Ar^2 + Hy + Iz + J' = d$, equivale a $z = A'r^2 +$

$H'y + p$, onde $A' = -A/I$, $H' = -H/I$ e $p = (d - J')/I$. Vemos então que a superfície representada pela equação $Ax^2 + Gx + Hy + Iz + J = d$ é o cilindro obtido deslocando-se a parábola $z = A'r^2 + p$ (ou seja, $z = A'(x + G/2A)^2 + p$), situada no plano $y = 0$, paralelamente a si mesma, com seu vértice deslizando sobre a reta $z = H'y + p$, contida no plano $r = 0$ (isto é, $x = -G/2A$).

Exercícios

1. Mostre que por cada ponto do parabolóide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ passam duas retas inteiramente contidas nele.

46

Matrizes e Formas Quadráticas

Veremos nesta seção um processo algébrico para determinar os eixos ortogonais em $\mathbb{R}^3$ segundo os quais uma forma quadrática com três variáveis se exprime como combinação linear de quadrados das coordenadas (isto é, sem termos em xy, xz ou yz). A existência desses eixos foi demonstrada na Seção 42 mas não se mostrou ali como obtê-los de maneira efetiva.

O método que apresentaremos agora é uma extensão direta para três variáveis daquele que foi exposto na Seção 20 para o caso de duas variáveis. Entretanto, para evitar uma desnecessária complicação notacional, usaremos a linguagem e as operações com matrizes.

Dado o vetor $v=(x, y, z)$ indicaremos com $\mathbf{v}$ a matriz-coluna $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e com $\mathbf{v}^T = [x\ y\ z]$ sua transposta. De acordo com a definição geral dada na Seção 34, o produto das matrizes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

é dado por

$$\mathbf{av} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} r &= a_1x + b_1y + c_1z \\ s &= a_2x + b_2y + c_2z \\ t &= a_3x + b_3y + c_3z. \end{aligned}$$

Por sua vez, o produto de $\mathbf{v}^T$ pela mesma matriz $\mathbf{a}$ é

$$\mathbf{v}^T\mathbf{a} = [x\ y\ z]\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = [\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}],$$

onde

$$\begin{aligned} \overline{x} &= a_1x + a_2y + a_3z \\ \overline{y} &= b_1x + b_2y + b_3z \\ \overline{z} &= c_1x + c_2y\ + c_3z. \end{aligned}$$

Sob o ponto de vista matricial, a forma quadrática

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cy^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$$

se escreve como

$$\varphi(x, y, z) = [x\ y\ z]\begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{v}^T\mathbf{m}\mathbf{v},$$

onde $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

A matriz $\mathbf{m}$ da forma quadrática φ é *simétrica*, ou seja, seu termo na i-ésima linha com a j-ésima coluna é igual ao termo da j-ésima linha com a i-ésima coluna.

A notação matricial nos permitirá exibir com simplicidade como fica a matriz $\mathbf{m}$ da forma quadrática φ quando se efetua uma mudança de coordenadas em $\mathbb{R}^3$.

Todas as mudanças de coordenadas que fizermos nesta seção manterão fixa a origem.

Ao passarmos de um sistema de eixos ortogonais OXYZ, no qual os vetores unitários dos eixos são e_1, e_2, e_3, para o sistema ortogonal $OX'Y'Z'$, com vetores unitários f_1, f_2, f_3, onde

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3 \\ f_2 &= a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3 \\ f_3 &= a_3e_1 + b_3e_2 + c_3e_3, \end{aligned}$$

um ponto P cujas coordenadas são (x, y, z) no sistema OXYZ passa a ter coordenadas (r, s, t) no novo sistema $OX'Y'Z'$, com

$$\begin{aligned} r &= a_1x + b_1y + c_1z \\ s &= a_2x + b_2y + c_2z \\ t &= a_3x + b_3y + c_3z \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} x &= a_1r + a_2s + a_3t \\ y &= b_1r + b_2s + b_3t \\ z &= c_1r + c_2s + c_3t. \end{aligned}$$

Sejam $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $w = (r, s, t) \in \mathbb{R}^3$ os vetores-coordenada do ponto P nos dois sistemas. Então podemos escrever $\mathbf{w} = \mathbf{av}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{a}^T\mathbf{w}$, onde

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}.$$

Como vimos na Seção 41, a matriz $\mathbf{a}$, que define a mudança de coordenadas entre eixos ortogonais, é uma matriz *ortogonal*, isto é, cumpre $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T = \mathbf{I_3}$.

Quando passamos dos eixos OXYZ para os eixos $OX'Y'Z'$, ou seja, das coordenadas x, y, z para as coordenadas r, s, t (do mesmo ponto), a forma quadrática φ muda de coeficientes, tornando-se

$$\varphi(x, y, z) = \overline{\varphi}(r, s, t) = A'r^2 + B's^2 + C't^2 + 2D'rs + 2E'rt + 2F'st.$$

Os novos coeficientes A', B', etc podem ser calculados diretamente a partir dos antigos A, B, etc. Isto foi feito na Seção 20 e poderia ser feito aqui mas as expressões finais seriam muito complicadas e pouco esclarecedoras. A linguagem matricial, entretanto, fornece uma solução simples para este problema (além de se mostrar bastante eficiente na análise subseqüente). Com efeito, se chamarmos de

$$\mathbf{m}' = \begin{bmatrix} A' & D' & E' \\ D' & B' & F' \\ E' & F' & C' \end{bmatrix}$$

a matriz de φ no sistema de eixos $OX'Y'Z'$, afirmamos que se tem:

$$\mathbf{m}' = \mathbf{ama}^{\mathsf{T}}.$$

Para chegar a esta conclusão, faremos uso de dois fatos que estabeleceremos agora:

1º) *Se* $\mathbf{a}$ *é uma matriz* 3×3 *e* $\mathbf{v}$ *é uma matriz* 3×1 *então* $(\mathbf{av})^{\mathsf{T}} = \mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{a}^{\mathsf{T}}$.

Isto se segue imediatamente das definições, pois cada um dos membros desta igualdade é uma matriz 1×3 na qual o primeiro, o segundo e o terceiro termos são, respectivamente, o produto interno da primeira, da segunda e da terceira linha da matriz $\mathbf{a}$ pelo vetor $\mathbf{v}$.

2º) *Se duas matrizes simétricas* 3×3, $\mathbf{m_1}$ *e* $\mathbf{m_2}$, *são tais que* $\mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{m_1}\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{m_2}\mathbf{v}$ *para todo* $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *então* $\mathbf{m_1} = \mathbf{m_2}$.

Com efeito, a partir dessas matrizes definimos duas formas quadráticas φ_1 e φ_2 tais que $\varphi_1(x,y,z) = \mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{m_1}\mathbf{v}$ e $\varphi_2(x,y,z) = \mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{m_2}\mathbf{v}$ para todo $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Então $\varphi_1(x,y,z) = \varphi_2(x,y,z)$ para todo terno (x,y,z), logo os polinômios φ_1 e φ_2 têm os mesmos coeficientes, ou seja, $\mathbf{m_1} = \mathbf{m_2}$.

Vamos agora provar que $\mathbf{m}' = \mathbf{ama}^{\mathsf{T}}$ quando $\mathbf{m}$ e $\mathbf{m}'$ são as matrizes da mesma forma quadrática φ relativamente a dois sistemas de eixos ortogonais $OXYZ$ e $OX'Y'Z'$ respectivamente. Esta hipótese sobre $\mathbf{m}$ e $\mathbf{m}'$ significa que se $\mathbf{a}$ é a matriz da mudança de coordenadas então, para todo $v = (x,y,z)$ e $\mathbf{av} = \mathbf{w} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}$ tem-se

$$\mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{mv} = \varphi(x,y,z) = \overline{\varphi}(r,s,t) = \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\mathbf{m}'\mathbf{w},$$

logo $\mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{mv} = \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\mathbf{m}'\mathbf{w} = \mathbf{v}^{\mathsf{T}}(\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{m}'\mathbf{a})\mathbf{v}$. Segue-se que $\mathbf{m} = \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{m}'\mathbf{a}$. Multiplicando esta igualdade à esquerda por $\mathbf{a}$ e à direita por $\mathbf{a}^{\mathsf{T}}$, obtemos

$$\mathbf{m}' = \mathbf{ama}^{\mathsf{T}},$$

como queríamos demonstrar.

Observação 46.1 Revejamos o Exemplo 42.1 em termos da notação matricial. Sejam

$$\mathbf{a} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ \mathbf{w} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -6 \\ 6 & 5 & 0 \\ -6 & 0 & 11 \end{bmatrix}.$$

Então a matriz $\mathbf{a}$ é ortogonal e a mudança de coordenadas é dada por $\mathbf{v} = \mathbf{a}^T\mathbf{w}$. Além disso, temos $\varphi(x, y, z) = \mathbf{v}^T\mathbf{m}\mathbf{v}$. Substituindo $\mathbf{v}$ por $\mathbf{a}^T\mathbf{w}$ obtemos $\overline{\varphi}(r, s, t) = \mathbf{w}^T\mathbf{a}\mathbf{m}\mathbf{a}^T\mathbf{w}$. Um cálculo direto (o único a ser feito) mostra que

$$\mathbf{a}\mathbf{m}\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

A igualdade matricial

$$\mathbf{v}^T\mathbf{m}\mathbf{v} = \mathbf{w}^T(\mathbf{a}\mathbf{m}\mathbf{a}^T)\mathbf{w}$$

significa, portanto, que

$$-2x^2 + 5y^2 + 11z^2 + 12xy - 12xz = 7r^2 + 14s^2 - 7t^2$$

quando

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{7}(2r - 3s + 6t) \\ y &= \frac{1}{7}(6r - 2s - 3t) \\ z &= \frac{1}{7}(3r + 6s + 2t). \end{aligned}$$

Isto mostra a conveniência da notação matricial.

Como no caso de duas variáveis, chama-se *polinômio característico* da matriz $\mathbf{m}$ ao polinômio de grau três na variável λ, que indicaremos com $p_{\mathbf{m}}(\lambda)$, ou simplesmente $p(\lambda)$, e definiremos pondo

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{m} - \lambda\mathbf{I_3}) = \det \begin{bmatrix} A - \lambda & D & E \\ D & B - \lambda & F \\ E & F & C - \lambda \end{bmatrix}.$$

As raízes deste polinômio são chamadas os *autovalores* da matriz $\mathbf{m}$.

Após a mudança de coordenadas determinada pela matriz $\mathbf{a}$, a forma quadrática passa a ter a matriz $\mathbf{m}' = \mathbf{a}\mathbf{m}\mathbf{a}^T$. O polinômio característico da matriz $\mathbf{m}'$ é

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{m}'}(\lambda) = \det(\mathbf{m}' - \lambda\mathbf{I_3}) &= \det(\mathbf{a}\mathbf{m}\mathbf{a}^T - \lambda\mathbf{I_3}) = \det[\mathbf{a}(\mathbf{m} - \lambda\mathbf{I_3})\mathbf{a}^T] \\ &= \det\mathbf{a} \cdot \det(\mathbf{m} - \lambda\mathbf{I_3}) \cdot \det\mathbf{a}^T = \det(\mathbf{m} - \lambda\mathbf{I_3}) \\ &= p_{\mathbf{m}}(\lambda) \end{aligned}$$

(Lembremos que $\det \mathbf{a} = \det \mathbf{a}^{\mathsf{T}} = \pm 1$.)

Isto nos mostra que o polinômio característico da matriz de φ não muda quando se passa de um sistema de eixos ortogonais para outro. Portanto $p(\lambda)$ é, na verdade, o polinômio característico da forma quadrática φ.

Fazendo uso do que foi estabelecido na Seção 42, tomamos um sistema de eixos ortogonais, relativo ao qual a forma φ assume o aspecto $A'r^2 + B's^2 + C't^2$, logo sua matriz nessas coordenadas é

$$\mathbf{m}' = \begin{bmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{bmatrix}$$

e daí

$$\mathbf{m}' - \lambda \mathbf{I_3} = \begin{bmatrix} A' - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & B' - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & C' - \lambda \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de $\mathbf{m}'$ é

$$p(\lambda) = (A' - \lambda)(B' - \lambda)(C' - \lambda),$$

cujas raízes (autovalores de φ) são A', B' e C'. Estes números, que passaremos a representar por λ_1, λ_2 e λ_3, são por conseguinte os autovalores de qualquer matriz que represente a forma quadrática φ num sistema de eixos ortogonais.

Uma equação algébrica do terceiro grau (com coeficientes reais) deve necessariamente ter uma raiz real mas pode perfeitamente ter, além dela, duas raízes complexas. O que acabamos de mostrar é que as raízes da equação característica $p(\lambda) = 0$, ou seja, os 3 autovalores de uma forma quadrática, (portanto de qualquer matriz simétrica) são números reais.

Dizer que o número λ_0 é autovalor da matriz $\mathbf{m}$, ou seja, que o determinante de $\mathbf{m} - \lambda_0 \mathbf{I_3}$ é igual a zero, equivale a afirmar que o sistema linear homogêneo de três equações com três incógnitas $(\mathbf{m} - \lambda_0 \mathbf{I_3}) \cdot \mathbf{v} = 0$ é indeterminado, logo possui alguma solução $v = (x, y, z)$ não-trivial, isto é, $v \neq (0, 0, 0)$. Ora, $(\mathbf{m} - \lambda_0 \mathbf{I_3}) \cdot \mathbf{v} = 0$ é o mesmo que $\mathbf{m} \cdot \mathbf{v} = \lambda_0 \mathbf{v}$.

Portanto, λ_0 é um autovalor de $\mathbf{m}$ se, e somente se, existe algum vetor $v \neq 0$ tal que $\mathbf{m} \cdot \mathbf{v} = \lambda_0 \cdot \mathbf{v}$. Um tal vetor v chama-se um *autovetor* da matriz $\mathbf{m}$ (mais precisamente, um autovetor correspondente ao autovalor λ_0).

Se v é um autovetor de $\mathbf{m}$ correspondente ao autovalor λ_0 então, para todo $t \neq 0$, seu múltiplo tv tem a mesma propriedade, pois $\mathbf{m} \cdot (t\mathbf{v}) = t(\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) = t(\lambda_0 \mathbf{v}) = \lambda_0(t\mathbf{v})$. Em particular, tomando $t = |v|^{-1}$, vemos que a todo autovalor λ_0 corresponde (ao menos) um autovetor unitário.

Observação 46.2 Se $\mathbf{m}$ e $\mathbf{m}'$ são matrizes da mesma forma quadrática, seus autovalores coincidem mas seus autovetores nem sempre.

Exemplo 46.1 Consideremos a forma quadrática $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(x, y, z) = 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz.$$

Sua matriz é

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix},$$

logo

$$\mathbf{m} - \lambda \mathbf{I_3} = \begin{bmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

e seu polinômio característico é

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{m} - \lambda \mathbf{I_3}) = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162.$$

As primeiras tentativas com os divisores de 162 funcionam e nos revelam que as raízes desse polinômio são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ e $\lambda_3 = 9$. Estes são portanto os autovalores da matriz $\mathbf{m}$.

Os autovetores correspondentes são as soluções não-nulas $v = (x, y, z)$ dos sistemas lineares homogêneos

$$(\mathbf{m} - 3\mathbf{I_3})\mathbf{v} = 0, \quad (\mathbf{m} - 6\mathbf{I_3})\mathbf{v} = 0 \text{ e } (\mathbf{m} - 9\mathbf{I_3})\mathbf{v} = 0,$$

que se escrevem por extenso como:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x - 2z = 0 \\ -2y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 3y - 2z = 0 \\ -2y - 4z = 0 \end{cases}$$

Tais soluções são respectivamente os vetores

$$u = (r, 2r, 2r), \quad v = (2s, s, -2s) \text{ e } w = (-2t, 2t, -t),$$

onde r, s e t são números reais não-nulos quaisquer. Tomando $r = s = t = 1/3$, obtemos os autovetores unitários

$$f_1 = (1/3, 2/3, 2/3), \quad f_2 = (2/3, 1/3, -2/3), \quad f_3 = (-2/3, 2/3, -1/3).$$

Tem-se, portanto $\mathbf{m} \cdot \mathbf{f_1} = 3 \cdot \mathbf{f_1}$, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{f_2} = 6 \cdot \mathbf{f_2}$ e $\mathbf{m} \cdot \mathbf{f_3} = 9 \cdot \mathbf{f_3}$.

Notamos que, além de unitários, os autovetores f_1, f_2 e f_3 são dois a dois ortogonais. Isto nos assegura que, se tomarmos um sistema de coordenadas no qual estes sejam os vetores unitários dos eixos, a matriz da forma quadrática φ nesse sistema será

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix},$$

conforme estabelece o seguinte

Teorema 1. *Se* $f_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $f_2 = (a_2, b_2, c_2)$ *e* $f_3 = (a_3, b_3, c_3)$ *são autovetores unitários, dois a dois ortogonais, da matriz* $\mathbf{m}$*, com* $\mathbf{mf_1} = \lambda_1 \mathbf{f_1}$, $\mathbf{mf_2} = \lambda_2 \mathbf{f_2}$ *e* $\mathbf{mf_3} = \lambda_3 \mathbf{f_3}$ *então a matriz ortogonal*

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \textit{é tal que} \quad \mathbf{ama}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \Lambda.$$

Demonstração: Basta observar que $\mathbf{mf_1}, \mathbf{mf_2}$ e $\mathbf{mf_3}$ são as colunas da matriz $\mathbf{ma}^{\mathsf{T}}$ e que $\lambda_1 \mathbf{f_1}$, $\lambda_2 \mathbf{f_2}$ e $\lambda_3 \mathbf{f_3}$ são as colunas da matriz $\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\Lambda$. Portanto, dizer que f_1, f_2 e f_3 são autovetores de $\mathbf{m}$ correspondentes aos autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 respectivamente significa afirmar que $\mathbf{ma}^{\mathsf{T}} = \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\Lambda$ donde (multiplicando à esquerda por $\mathbf{a}$) resulta que $\mathbf{ama}^{\mathsf{T}} = \Lambda$.

Evidentemente, a conclusão do teorema acima equivale a dizer que se $\mathbf{m}$ é a matriz da forma quadrática $\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$ e f_1, f_2, f_3 são os vetores unitários dos eixos de um novo sistema cujas coordenadas são r, s, t então

$$\varphi(x, y, z) = \overline{\varphi}(r, s, t) = \lambda_1 r^2 + \lambda_2 s^2 + \lambda_3 t^2.$$

O fato de f_1, f_2 e f_3 no Exemplo 46.1 serem dois a dois ortogonais não é uma mera coincidência. Isto é o que nos diz o

Teorema 2. *Autovetores que correspondem a autovalores diferentes de uma matriz simétrica* $\mathbf{m}$ *são ortogonais.*

Demonstração: Temos $\mathbf{m}^T = \mathbf{m}$ e vetores não-nulos u, v tais que $\mathbf{mu} = \lambda\mathbf{u}$ e $\mathbf{mv} = \mu\mathbf{v}$ com $\lambda \neq \mu$. Queremos provar que $\langle u, v\rangle = 0$. Na linguagem matricial, o produto interno $\langle u, v\rangle$ se escreve como $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$. Então

$$(\lambda - \mu)\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}^T\mathbf{v} - \mu\mathbf{u}^T\mathbf{v} = (\lambda\mathbf{u})^T\mathbf{v} - \mathbf{u}^T\mu\mathbf{v} = (\mathbf{mu})^T\mathbf{v} - \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{mv}$$
$$= \mathbf{u}^T\mathbf{m}^T\mathbf{v} - \mathbf{u}^T\mathbf{mv} = \mathbf{u}^T\mathbf{mv} - \mathbf{u}^T\mathbf{mv} = 0.$$

Como $\lambda - \mu \neq 0$, concluímos que $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0$, logo u e v são ortogonais.

Fica assim delineado o processo algébrico para encontrar os vetores unitários f_1, f_2, f_3 dos eixos ortogonais que reduzem a forma quadrática φ a uma combinação linear de quadrados das coordenadas. (Este processo chama-se *diagonalização*.) Ele consta de duas etapas:

1ª) Resolver a equação característica $p(\lambda) = 0$. Trata-se de uma equação do terceiro grau, para a qual existe uma fórmula de resolução. Entretanto, essa fórmula não é de grande valia pois no caso em que as três raízes são reais (como ocorre aqui) a fórmula as exprime por meio de radicais complexos. O modo mais eficiente de resolver uma equação do terceiro grau é usar o método de Newton, que dá excelentes aproximações para as raízes. (A menos que se trate de uma equação com raízes inteiras, que podem ser determinadas por uma simples inspeção.)

2ª) Obtidos os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (raízes da equação $p(\lambda) = 0$), encontrar autovetores unitários correspondentes, resolvendo os sistemas lineares homogêneos (indeterminados) $\mathbf{mu} = \lambda_1\mathbf{u}$, $\mathbf{mv} = \lambda_2\mathbf{v}$ e $\mathbf{mw} = \lambda_3\mathbf{w}$. Se os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ forem três números diferentes, os autovetores que lhes correspondem são dois a dois ortogonais e o processo termina.

Se tivermos $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, achamos u e v unitários, com $\mathbf{mu} = \lambda_1\mathbf{u}$, $\mathbf{mv} = \lambda_2\mathbf{v}$, logo u e v são ortogonais. Em seguida tomamos w unitário, perpendicular a u e v (por exemplo, $w = u \times v$). Então w é necessariamente o terceiro autovetor procurado. Com efeito, sendo $\mathbf{w}^T\mathbf{u} = \mathbf{w}^T\mathbf{v} = 0$ e $\mathbf{m}^T = \mathbf{m}$, temos

$$(\mathbf{mw})^T\mathbf{u} = \mathbf{w}^T\mathbf{mu} = \mathbf{w}^T \cdot \lambda\mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{w}^T\mathbf{u} = 0$$

e analogamente $(\mathbf{mw})^T\mathbf{v} = 0$. Assim, o vetor $\mathbf{mw}$ é ortogonal a u e a v, logo é um múltiplo de w, ou seja, w é um autovetor de $\mathbf{m}$.

Teoricamente, poderia ainda acontecer que as três raízes da equação $p(\lambda) = 0$ fossem iguais. Mas neste caso, não haveria problema algum

para resolver pois teríamos

$$\mathbf{ama}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \cdot \mathbf{I_3}$$

logo $\mathbf{m} = \mathbf{a}^{\mathsf{T}} \cdot \lambda \mathbf{I_3} \mathbf{a} = \lambda \mathbf{I_3}$ e a forma quadrática φ seria do tipo $\lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2$ em qualquer sistema de coordenadas.

Exemplo 46.2 A matriz da forma quadrática

$$\varphi(x, y, z) = 17x^2 + 14y^2 + 14z^2 - 4xy - 4xz - 8yz$$

é

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico é

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 45\lambda^2 - 648\lambda + 2916.$$

Novamente, experimentando os divisores do termo constante 2916 encontramos a raiz $\lambda_1 = 9$. Dividindo $p(\lambda)$ por $\lambda - 9$ obtemos o quociente $-\lambda^2 + 36\lambda - 324 = -(\lambda - 18)^2$. Logo as raízes de $p(\lambda)$, autovalores de $\mathbf{m}$, são $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 18$ e $\lambda_3 = 18$. Resolvendo os sistemas lineares (indeterminados) $\mathbf{mv} = 9\mathbf{v}$ e $\mathbf{mw} = 18\mathbf{w}$ vemos que os autovetores correspondentes ao autovalor 9 são todos os da forma $v = (x, 2x, 2x)$ com $x \neq 0$ e os autovetores correspondentes ao autovalor 18 são $w = (-2y - 2z, y, z)$, com y e z arbitrários mas não simultaneamente nulos. Observe-se que, sejam quais forem x, y e z, os vetores v e w são sempre ortogonais. Tomando $x = 1/3$, obtém-se o autovetor unitário $f_1 = (1/3, 2/3, 2/3)$. Em seguida, pondo $y = \sqrt{2}/2$, $z = -\sqrt{2}/2$, tem-se o autovetor unitário $f_2 = (0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ e, finalmente, para $y = z = \sqrt{2}/6$, o autovetor unitário $f_3 = (-2\sqrt{2}/3, \sqrt{2}/6, \sqrt{2}/6)$. (Bem entendido: f_1 corresponde ao autovalor 9 enquanto f_2 e f_3 correspondem ao autovalor 18.) Assim, a matriz ortogonal

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -2\sqrt{2}/3 & \sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/6 \end{bmatrix}$$

é tal que

$$\mathbf{a}\mathbf{m}\mathbf{a}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

e, no sistema ortogonal de eixos que contêm os vetores unitários f_1, f_2, f_3, a forma quadrática φ se exprime como

$$\varphi(x, y, z) = \overline{\varphi}(r, s, t) = 9r^2 + 18s^2 + 18t^2.$$

Exercícios

1. Determine os autovalores das matrizes abaixo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Escreva as equações de mudança de eixos (rotações) que eliminam os termos em xy, xz e yz nas formas quadráticas do Exercício 44.1.

3. Para cada uma das equações abaixo, efetue uma rotação de eixos de modo a eliminar os termos em xy, xz e yz. Em seguida, efetue translações de modo a eliminar, ou reduzir a um só, os termos em x, y e z. Identifique então a quádrica definida pela equação.

$2x^2 + 2y^2 - z^2 + 8xy - 4xz - 4yz = 2$
$2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 2yz = 1$
$4x^2 + 6y^2 + 4z^2 - 4xz + 1 = 0$
$2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + 12x + 6y + 6z = 1$
$x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz = 7$
$5x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz + 2yz + 2x - y = 0$
$x^2 + z^2 - xy + xz + yz - 2x + 2y - 2z + 1 = 0$
$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz + 4x - 8y + 12z + 4 = 0$
$2x^2 + 3y + 4z + 4 = 0$
$2z^2 + 5x + 12y + 12z + 18 = 0$
$x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy - 4xz + 6x + 12y + 18z = 0$
$2x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 5xy - 2xz - 2x - 2y + z = 0$
$3x^2 + y^2 + z^2 + 4yz + 12x + 2y - 2z + 9 = 0$
$4x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 8xy + 12xz + 10x + y + 4z + 1 = 0$
$2x^2 + 4yz - 4x + 2y + 6z + 5 = 0$
$3x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xy - 4x + 2y + 6z + 5 = 0$

47

Transformações Lineares em $\mathbb{R}^3$

Uma *transformação linear* $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma correspondência que associa a cada vetor $v = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ um vetor $Mv = (x', y', z')$, chamado a *imagem*, ou o *transformado* de v por M, onde

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z. \end{aligned}$$

Os coeficientes a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ determinam a matriz

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix},$$

chamada a *matriz da transformação linear* M. Quando há necessidade de uma linguagem mais precisa, diz-se que $\mathbf{m}$ é a matriz de M relativamente à base canônica de $\mathbb{R}^3$, formada pelos vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. Observe-se que as colunas de $\mathbf{m}$ são os vetores Me_1, Me_2 e Me_3.

Como na Seção 23, vê-se facilmente que se $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear então, para $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se

$$M(u + v) = Mu + Mv, \quad M(\alpha v) = \alpha \cdot Mv.$$

Reciprocamente, se uma função $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ goza destas duas propriedades então M é uma transformação linear. Para mostrar isto, ponhamos $Me_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $Me_2 = (b_1, b_2, b_3)$ e $Me_3 = (c_1, c_2, c_3)$. Dado $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tem-se $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Logo

$$\begin{aligned} Mv &= M(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x \cdot Me_1 + y \cdot Me_2 + z \cdot Me_3 \\ &= x(a_1, a_2, a_3) + y(b_1, b_2, b_3) + z(c_1, c_2, c_3) \\ &= (a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z, a_3x + b_3y + c_3z). \end{aligned}$$

Além de M, consideremos uma transformação linear $N\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz é

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix}.$$

Definimos a soma $M + N\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, o produto $\alpha M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pelo número real α e o produto $MN\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das duas transformações lineares pondo, para cada $v \in \mathbb{R}^3$, $(M+N)v = Mv+Nv$, $(\alpha M)v = \alpha(Mv)$ e $(MN)v = M(Nv)$. Verifica-se imediatamente que $M + N$ e αN são transformações lineares, cujas matrizes são $\mathbf{m}+\mathbf{n}$ e $\alpha\mathbf{m}$ respectivamente. Quanto a MN, é claro que se trata de uma transformação linear. Afirmamos que sua matriz é $\mathbf{mn}$. Com efeito, a primeira coluna da matriz de MN é

$$\begin{aligned} (MN)e_1 &= M(Ne_1) = M(r_1, r_2, r_3) \\ &= (a_1r_1 + b_1r_2 + c_1r_3, a_2r_1 + b_2r_2 + c_2r_3, a_3r_1 + b_3r_2 + c_3r_3), \end{aligned}$$

que reconhecemos como o primeiro vetor-coluna da matriz $\mathbf{mn}$. Analogamente se vê que o segundo e o terceiro vetores-coluna da matriz de MN coincidem com aqueles de $\mathbf{mn}$, logo a matriz de MN é $\mathbf{mn}$.

Exemplo 47.1 As transformações lineares mais óbvias são a transformação identidade $I\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $Iv = v$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$, e a transformação nula $0\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, com $0v = 0$ seja qual for $v \in \mathbb{R}^3$. A matriz de I é a matriz identidade $\mathbf{I_3}$ e a matriz da transformação 0 é a matriz nula $\mathbf{0}$. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, a transformação linear $\alpha I\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ chama-se a *homotetia* de centro O e razão α. Tem-se $(\alpha I)v = \alpha v$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$; a matriz de αI tem três α's na diagonal principal e zeros nas demais posições.

Exemplo 47.2 (Projeção ortogonal sobre uma reta.) Seja r uma reta que passa pela origem em $\mathbb{R}^3$, determinada pelo vetor unitário $u = (a, b, c)$. Tem-se $r = \{tu; t \in \mathbb{R}\}$. A projeção ortogonal $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre r faz corresponder a cada vetor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ o vetor Pv, pertencente a r, tal que $v - Pv$ é ortogonal a u. Assim, devemos ter $Pv = tu$, $t \in \mathbb{R}$ e $\langle u, v - Pv\rangle = 0$, ou seja, $\langle u, v\rangle = \langle u, Pv\rangle$. Como u tem comprimento 1, ou seja, $\langle u, u\rangle = 1$, a condição $Pv = tu$ nos dá imediatamente $\langle u, Pv\rangle = t\langle u, u\rangle = t$, logo

$$Pv = tu = \langle u, Pv\rangle u = \langle u, v\rangle u.$$

Sabendo que $Pv = \langle u, v\rangle u$, vemos que $P(v + w) = Pv + Pw$ e $P(\alpha v) = \alpha \cdot Pv$, logo $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é linear. Em termos das coordenadas de $u = (a, b, c)$ e $v = (x, y, z)$, temos $Pv = (x', y', z')$, onde

$$x' = a^2x + aby + acz, \quad y' = abx + b^2y + bcz, \quad z' = acx + bcy + c^2z.$$

Por conseguinte, a matriz de P é

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}.$$

Nota-se que as linhas (e as colunas) de $\mathbf{p}$ são vetores múltiplos de $u = (a, b, c)$, logo se trata de uma matriz de posto 1. Isto corresponde ao fato de que as imagens Pv de todos os vetores $v \in \mathbb{R}^3$ são múltiplos do mesmo vetor u.

Exemplo 47.3 (Projeção sobre um plano.) Seja $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ o plano que passa pela origem e é perpendicular ao vetor unitário $u = (a, b, c)$. A projeção ortogonal $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre Π associa a cada $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ o pé Qv da perpendicular baixada de v sobre o plano Π. Assim, o vetor $v - Qv$ é perpendicular a Π (logo é múltiplo de u) e $v - (v - Qv) = Qv$ é perpendicular a u. Segue-se que $v - Qv = Pv =$ projeção ortogonal de v sobre a reta que passa pela origem e contém o vetor unitário u. Daí, $v - Qv = \langle v, u\rangle u$, pelo exemplo anterior. Então, para todo $v \in \mathbb{R}^3$, temos

$$Qv = v - \langle v, u\rangle u = v - Pv.$$

Portanto $Q = I - P$ e sua matriz é

$$\mathbf{q} = \mathbf{I_3} - \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1 - b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{bmatrix}.$$

Se calcularmos o determinante de q veremos que ele é igual a zero, logo as colunas desta matriz são linearmente dependentes. Mas não é necessário fazer contas para chegar a esta conclusão: as colunas de q são os vetores Qe_1, Qe_2, Qe_3, pertencentes ao plano Π, logo são coplanares. Assim, o posto de q é ≤ 2. Por outro lado, como o vetor $u = (a, b, c)$ não é zero, pelo menos uma de suas coordenadas é não-nula. Digamos que seja $c \neq 0$. Então

$$\det \begin{bmatrix} 1 - a^2 & -ab \\ -ab & 1 - b^2 \end{bmatrix} = 1 - a^2 - b^2 = c^2 \neq 0,$$

logo as duas primeiras colunas de $\mathbf{q}$ são linearmente independentes. O posto da matriz $\mathbf{q}$ é portanto igual a 2. Isto condiz com o fato de que as imagens $Q\nu$, $\nu \in \mathbb{R}^3$, preenchem o plano Π, que tem duas dimensões.

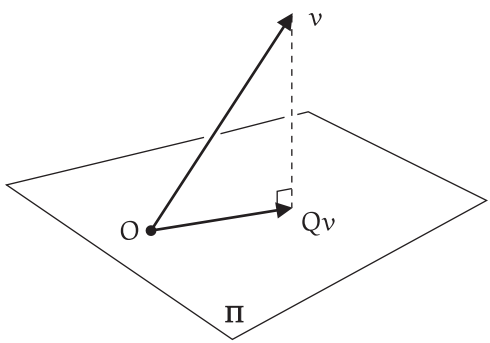


Figura 47.1 - A projeção ortogonal $Q\nu$ do vetor ν sobre o plano Π.

Exemplo 47.4 (Reflexão em torno de uma reta.) Seja r uma reta em $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e contém o vetor unitário $u = (a, b, c)$. A reflexão em torno da reta r é a função $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que associa a cada $\nu = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ o vetor $R\nu$ tal que r é a mediatriz do segmento de reta que liga ν a $R\nu$. Segue-se imediatamente (ver figura) que $\nu + R\nu = 2P\nu$, onde $P\nu = \langle \nu, u \rangle u$ é a projeção ortogonal de ν sobre a reta r. Noutras palavras, $R = 2P - I$ ou, mais explicitamente, $R\nu = 2\langle \nu, u \rangle u - \nu$ para todo $\nu \in \mathbb{R}^3$.

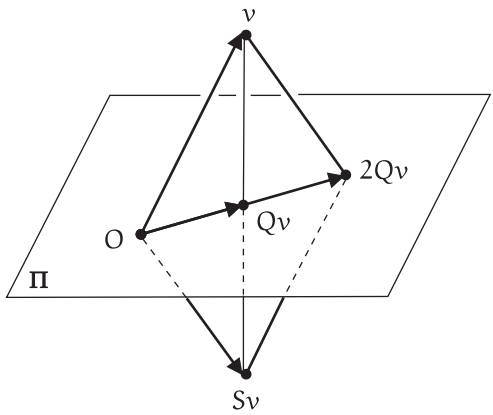


Figura 47.2 - Refletindo o vetor v em torno do plano Π.

Portanto, R é uma transformação linear e sua matriz é $\mathbf{r} = 2\mathbf{p} - \mathbf{I_3}$.

Exemplo 47.5 (Reflexão em torno de um plano.) Seja Π um plano que passa pela origem. A reflexão $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ em torno de Π associa a cada vetor $v \in \mathbb{R}^3$ o vetor Sv tal que Π é o plano mediador do segmento de reta que liga v a Sv. Noutras palavras o plano Π é perpendicular a esse segmento e o corta em seu ponto médio. Se Qv é a projeção ortogonal de v sobre Π então $v + Sv = 2Qv$, logo $Sv = 2Qv - v$. Assim, $S = 2Q - I$ é uma transformação linear e sua matriz é $\mathbf{s} = 2\mathbf{q} - \mathbf{I_3}$.

Em conformidade com a terminologia geral referente a funções, uma transformação linear $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ chama-se *invertível* quando existe $N\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear tal que $MN = NM = I$.

Então N chama-se a *inversa* de M e escreve-se $N = M^{-1}$.

Levando-se em conta que a matriz de MN é o produto das matrizes de M e N, mostra-se sem dificuldade que M é invertível se, e somente se, sua matriz $\mathbf{m}$ é invertível.

No Exemplo 47.1, toda homotetia αI, com $\alpha \neq 0$, é invertível e $(\alpha I)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot I$. Nos Exemplos 47.2 e 47.3, as transformações P e Q não são invertíveis, pois suas matrizes $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, tendo colunas linearmente dependentes, não possuem inversa, segundo o critério estabelecido na Seção 39.

Outra maneira de justificar a não-invertibilidade de P e Q é observar que essas transformações não são injetivas: existem vetores $v \neq v'$ com $Pv = Pv'$ e $w \neq w'$ com $Qw = Qw'$; basta tomar v e v' sobre um mesmo plano perpendicular a r e w, w' sobre a mesma reta perpendicular a Π.

Ora, uma função $f\colon X \to Y$ é invertível se, e somente se, é injetiva e sobrejetiva. Isto é um fato geral, referente a conjuntos X, Y quaisquer.

É suficiente que se tenha $MN = I$ para concluir que $NM = I$ e portanto que as transformações lineares M e N são inversas uma da outra. Isto resulta da Observação 2, no final da Seção 39.

As projeções P e Q, definidas nos Exemplos 47.2 e 47.3, cumprem as relações $P^2 = P$ e $Q^2 = Q$. Isto pode ser verificado calculando os quadrados de suas matrizes ou (muito mais simplesmente) observando que, como $Pv \in r$ (respectivamente $Qv \in \Pi$) então Pv (respect. Qv) é a sua própria projeção.

Fazendo uso das relações $P^2 = P$ e $Q^2 = Q$, calculemos os quadrados R^2 e S^2 das transformações dos Exemplos 47.4 e 47.5. Temos:

$$R^2 = (2P - I)(2P - I) = 4P^2 - 4P + I = 4P - 4P + I = I$$

e, de modo análogo, vemos que $S^2 = I$. Estas igualdades $R \cdot R = I$ e $S \cdot S = I$ significam que R e S são invertíveis e mais ainda, $R^{-1} = R$ e $S^{-1} = S$.

A verificação de que $RR = I$ e $SS = I$ pode também ser feita observando que se refletirmos Rv em torno de r obtemos v logo $R(Rv) = v$. Analogamente, $S(Sv) = v$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

Uma transformação linear invertível $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leva três vetores linearmente independentes u, v, w (isto é, não coplanares) em vetores linearmente independentes Mu, Mv, Mw. Com efeito, se estes últimos vetores fossem linearmente dependentes teríamos, digamos

$$Mw = \alpha Mu + \beta Mv = M(\alpha u + \beta v).$$

Como M é injetiva, daí resultaria $w = \alpha u + \beta v$ e u, v, w seriam linearmente dependentes.

Exemplo 47.6 (Transformações ortogonais.) Uma transformação linear $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ chama-se *ortogonal* quando sua matriz $\mathbf{m}$ é ortogonal, isto é, $\mathbf{m}\mathbf{m}^T = \mathbf{m}^T\mathbf{m} = \mathbf{I_3}$. As reflexões R e S, estudadas nos Exemplos 47.4 e 47.5 acima, são ortogonais. Com efeito, suas matrizes $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ são simétricas, isto é, $\mathbf{r}^T = \mathbf{r}$ e $\mathbf{s}^T = \mathbf{s}$. Além disso, sabemos que $\mathbf{r^2} = \mathbf{s^2} = \mathbf{I_3}$. Logo $\mathbf{r}\mathbf{r}^T = \mathbf{r^2} = \mathbf{I_3} = \mathbf{s^2} = \mathbf{s}\mathbf{s}^T$. Outro exemplo de transformação linear ortogonal é a *rotação* em torno de um eixo. Por exemplo, a rotação de ângulo α em torno do eixo OZ é a transformação

linear $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que leva o vetor $v = (x, y, z)$ no vetor $Mv = (x\cos\alpha - y \text{ sen } \alpha, x \text{ sen } \alpha + y\cos\alpha, z)$. Sua matriz $\mathbf{m}$ tem a forma:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{ sen } \alpha & 0 \\ \text{sen } \alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vê-se facilmente que $\mathbf{m}\mathbf{m}^T = \mathbf{m}^T\mathbf{m} = \mathbf{I_3}$.

Uma transformação linear ortogonal $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ preserva o produto interno de vetores. Esta afirmação significa que se M é ortogonal então, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^3$, tem-se $\langle Mu, Mv\rangle = \langle u, v\rangle$.

Como definimos a ortogonalidade de uma transformação linear M em termos de sua matriz $\mathbf{m}$, vamos provar esta afirmação interpretando o produto interno $\langle u, v\rangle = ax + by + cz$ do vetor $u = (a, b, c)$ pelo vetor $v = (x, y, z)$ como sendo o produto $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ das matrizes $\mathbf{u}^T = [a\ b\ c]$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Então, como $\mathbf{m}^T\mathbf{m} = \mathbf{I_3}$, temos

$$\langle Mu, Mv\rangle = (\mathbf{mu})^T(\mathbf{mv}) = \mathbf{u}^T\mathbf{m}^T\mathbf{mv} = \mathbf{u}^T\mathbf{I_3}\mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = \langle u, v\rangle.$$

Em particular, como $|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, vemos que uma transformação linear ortogonal $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ preserva o comprimento dos vetores: $|Mv| = |v|$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

Na verdade, vale a recíproca: se uma transformação linear $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é tal que $|Mv| = |v|$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$ então M é ortogonal. Com efeito, na linguagem matricial $|Mv| = |v|$ significa $(\mathbf{mv})^T(\mathbf{mv}) = \mathbf{v}^T\mathbf{v}$. Segue-se que $\mathbf{v}^T\mathbf{I_3}\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{v} = (\mathbf{mv})^T(\mathbf{mv}) = \mathbf{v}^T(\mathbf{m}^T\mathbf{m})\mathbf{v}$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$. Então, como vimos na seção anterior, dai resulta $\mathbf{m}^T\mathbf{m} = \mathbf{I_3}$, logo M é ortogonal.

Provamos na Seção 23 que toda transformação linear invertível $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transforma circunferências em elipses. Vamos mostrar agora que vale um resultado análogo em $\mathbb{R}^3$. Como anteriormente, utilizaremos o seguinte

Lema. *Seja $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear invertível. Existem vetores unitários $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, mutuamente ortogonais, que são transformados por M em três vetores não-nulos, mutuamente ortogonais, Mu, Mv, Mw.*

Demonstração: Dada a transformação linear M, definamos a forma quadrática $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ pondo, para cada $h = (x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$,

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= |Mh|^2 = |x \cdot Me_1 + y \cdot Me_2 + z \cdot Me_3|^2 \\ &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz,\end{aligned}$$

onde $A = |Me_1|^2$, $B = |Me_2|^2$, $C = |Me_3|^2$, $D = \langle Me_1, Me_2\rangle$, $E = \langle Me_1, Me_3\rangle$ e $F = \langle Me_2, Me_3\rangle$.

Se u, v, w são quaisquer vetores unitários mutuamente ortogonais, temos $h = xe_1 + ye_2 + ze_3 = ru + sv + tw$, logo

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= |Mh|^2 = |M(ru + sv + tw)|^2 \\ &= A'r^2 + B's^2 + C't^2 + 2D'rs + 2E'rt + 2F'st,\end{aligned}$$

onde $A' = |Mu|^2$, $B' = |Mv|^2$, $C' = |Mw|^2$, $D' = \langle Mu, Mv\rangle$, $E' = \langle Mu, Mw\rangle$, $F' = \langle Mv, Mw\rangle$.

Como vimos na Seção 42, é possível escolher os vetores unitários mutuamente ortogonais de tal forma que se tenha $D' = E' = F' = 0$. Isto significa que $\langle Mu, Mv\rangle = \langle Mu, Mw\rangle = \langle Mv, Mw\rangle = 0$, ou seja, que os vetores Mu, Mv e Mw são dois a dois ortogonais. (Note que, sendo M invertível, $u \neq 0 \Rightarrow Mu \neq M0$, ou seja, $Mu \neq 0$. Analogamente, Mv e Mw são não-nulos.)

Teorema. *Uma transformação linear invertível* $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *transforma a esfera unitária* $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *num elipsóide.*

Demonstração: Pelo lema, podemos escolher três vetores unitários u, v, w, dois a dois ortogonais, de modo que suas imagens Mu, Mv e Mw sejam vetores também dois a dois ortogonais, embora não-unitários. Todo $h \in S^2$ se escreve como $h = xu + yv + zw$, com $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (Atenção: isto não significa que $h = (x, y, z)$!) Então $Mh = x \cdot Mu + y \cdot Mv + z \cdot Mw$.

Pondo $f_1 = Mu/|Mu|$, $f_2 = Mv/|Mv|$ e $f_3 = Mw/|Mw|$, vemos que f_1, f_2, f_3 são os vetores unitários de um sistema de eixos ortogonais onde se tem

$$Mh = x|Mu|f_1 + y|Mv|f_2 + z|Mw|f_3.$$

Assim as coordenadas $r = x|Mu|$, $s = y|Mv|$ e $t = z|Mw|$ do ponto Mh nesse sistema satisfazem a condição

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} + \frac{t^2}{c^2} = x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

com $a = |Mu|$, $b = |Mv|$, $c = |Mw|$. Isto mostra que as imagens Mh dos pontos $h \in S^2$ pela transformação linear M formam o elipsóide cujos eixos têm comprimentos $2|Mu|$, $2|Mv|$ e $2|Mw|$ e se acham sobre os eixos que contêm os vetores f_1, f_2, f_3.

Daí resulta, como na Seção 23, que M transforma qualquer esfera num elipsóide.

Exercícios

1. Chama-se *núcleo* da transformação linear $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ao conjunto $\mathcal{N}(M) = \{v \in \mathbb{R}^3;\ Mv = 0\}$. Determine os núcleos das transformações lineares dos exemplos 47.1, 47.2, 47.3 e 47.4. Prove que se $u, v \in \mathcal{N}(M)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ então $\alpha u + \beta v \in \mathcal{N}(M)$.

2. Prove que há 4 possibilidades para o núcleo de uma transformação linear $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; (a) $\mathcal{N}(M) = \{0\}$; (b) $\mathcal{N}(M)$ é uma reta que passa pela origem; (c) $\mathcal{N}(M)$ é um plano que contém a origem; (d) $\mathcal{N}(M) = \mathbb{R}^3$.

3. Prove que uma transformação linear é injetiva se, e somente se, seu núcleo se reduz ao único elemento $0 \in \mathbb{R}^3$.

4. Chama-se *adjunta* da transformação linear $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ à transformação linear $M^*\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\langle Mu, v\rangle = \langle u, M^*v\rangle$ para $u, v \in \mathbb{R}^3$ quaisquer. Se $\mathbf{m}$ é a matriz de M, mostre que M^* é a transformação linear cuja matriz é $\mathbf{m}^T$.

5. Uma transformação linear $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ chama-se *auto-adjunta* quando $M^* = M$. Pelo exercício anterior, isto significa que a matriz $\mathbf{m}$ de M é simétrica, isto é, $\mathbf{m}^T = \mathbf{m}$. Prove que se M é auto-adjunta então existem vetores unitários u, v, w, mutuamente ortogonais, tais que $Mu = \lambda_1 u$, $Mv = \lambda_2 v$ e $Mw = \lambda_3 w$. (Autovetores de M.)

6. Prove que, para toda transformação linear $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, a transformação M^*M é auto-adjunta e que o núcleo de M^*M coincide com o núcleo de M. Em particular, se M é invertível, o mesmo ocorre com M^*M.

7. Seja $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear invertível. Se os vetores unitários u, v, w, mutuamente ortogonais, são tais que $M^*Mu = \lambda_1 u$, $M^*Mv = \lambda_2 v$ e $M^*Mw = \lambda_3 w$, prove que Mu, Mv e Mw são vetores (não-nulos) mutuamente ortogonais.

Bibliografia

[1] Elon Lages Lima (com a colaboração de Paulo Cezar P. Carvalho), *Coordenadas no Plano* - Coleção do Professor de Matemática - SBM, 1992.

[2] Elon Lages Lima (com a colaboração de Paulo Cezar P. Carvalho), *Coordenadas no Espaço* - SBM, 1993.

[3] Elon Lages Lima, Paulo Cezar P. Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, *A Matemática do Ensino Médio*, vol 3. SBM, 1998.

[4] W. F. Osgood e W. Graustein, *Plane and Solid Analytic Geometry* - MacMillan, 1921.

[5] Elon Lages Lima, *Matemática e Ensino* - Coleção do Professor de Matemática - SBM, 2001.

[6] Elon Lages Lima, *Álgebra Linear* - Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2003.

Os três primeiros itens acima contêm exposições mais elementares dos assuntos aqui tratados. O primeiro deles traz as soluções completas dos exercícios propostos. O item [4] é um livro-texto tradicional e primoroso. [5] é uma coleção de artigos independentes, um dos quais discute a eficiência dos métodos para resolver um sistema de equações lineares e outro caracteriza axiomaticamente o determinante. O item [6] é a continuação natural dos estudos iniciados neste livro.

O autor:

Elon Lages Lima é Pesquisador Emérito do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Doutor *Honoris Causa* pela Universidade Federal de Alagoas e pela Universidad Nacional de Ingenieria do Peru, Professor *Honoris Causa* da Universidade Federal do Ceará, Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Campinas e da Pontifícia Universidade Católica do Peru, além de membro titular da Academia Brasileira de Ciências e da *TWAS (Academy of Sciences for the Developing World)*.

É autor de vários livros de Topologia, Análise, Álgebra e Matemática Elementar, dois dos quais são ganhadores do Prêmio Jabuti.

A coleção

A coleção Matemática Universitária é uma série de livros escritos por matemáticos competentes e com grande experiência didática, a fim de servirem de textos para cursos em nível de graduação nas universidades brasileiras.

Os livros da coleção contêm exposições objetivas e bem organizadas, acompanhadas de exercícios selecionados.

O livro

Esta é uma introdução à Geometria Analítica, isto é, ao uso de coordenadas para estudar a Geometria Euclideana – plana e espacial.

À medida em que se fazem necessários, os vetores são introduzidos, tirando-se proveito de sua grande simplicidade notacional e seu forte apelo geométrico.

Os sistemas lineares são mostrados como um exemplo de conexão da Álgebra com a Geometria, motivando a consideração de matrizes e da dependência linear entre suas linhas e colunas. Áreas e volumes levam ao estudo dos determinantes. Cônicas e quádricas conduzem às formas quadráticas, às matrizes simétricas e seus autovalores.

De um modo geral, o livro mostra como conceitos básicos de Álgebra Linear são úteis para tratar, eficiente e elegantemente, problemas de Geometria Analítica.

impa

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA